

Bir Mantıkçının Gözünden Sıkça Sorulan Sorulara Yanıtlar

AHMET ÇEVİK

Jandarma ve Sahil Güvenlik Akademisi, Sosyal Bilimler Bölümü

✉ a.cevik@hotmail.com



Okul hayatında öğrencilere matematikte sayılarla ve kümelerle ilgili bir sürü bilginin ezberletildiğini biliyoruz. Liseden henüz mezun olup üniversitede matematik dersi alan öğrenciler (özellikle sayısal temelden gelmeyenler), ezberletilen bilgilerin ve formüllerin altında yatan gerekçelerini doğal olarak bilmeden geliyorlar. Öğretildiği ama anlamadıkları için değil, zaten öğretilmediği için. Örneğin, ortaokullarda ya da liselerde, “Boş küme her kümenin altkümesidir” diye bir şey ezberletilir ama bunun neden gerçekten öyle olduğu hakkında mantıklı ya da anlamlı bir açıklama yapılmaz. Bu gibi benzer iddialar veya temel tanımlar için açıklama yapılması istendiğinde “İşimize öyle geliyor o yüzden” demek de çok tatmin edici gelmiyor bana. Ben bunun yerine “Öyle olmasaydı ne olurdu?” sorusunu sorduktan sonra bir saçmalık/anlamsızlık bulup, “Demek ki öyle olmalı” demenin daha ikna edici olduğuna inanıyorum. Sık kullanılan matematiksel gerçeklerin sebeplerini bilmek, bir kişinin matematik altyapısını mutlaka güçlendirir. Bu yazıda, hakkında sıkça sorulan bazı matematiksel gerçeklerin nedenlerini olabildiğince anlamlandırarak yazmaya çalışacağım.

■ Boş Küme Neden Her Kümenin Altkümesidir?

Boş kümenin $\emptyset$ ile gösterildiğini biliyoruz. “Boş küme her kümenin altkümesidir” demek, “Eğer A herhangi bir kümeysse, $\emptyset \subseteq A$ ” olduğunu söylemekle aynı şeydir. A herhangi bir küme olsun; $\emptyset \subseteq A$ ifadesinin doğru olması demek, “Eğer x ögesi boş kümenin içindeyse, x ögesi A ’nın da içindedir” demektir. Tırnak içindeki önerme, $p \rightarrow q$ biçiminde bir koşullu önermedir. Önermenin p yani öncül kısmı “ $x \in \emptyset$ ” ifadesine karşılık gelir, q yani ardıl kısmı da “ $x \in A$ ” ifadesine karşılık gelir. Demek ki $\emptyset \subseteq A$ ifadesinin doğru olması, belirtilen $p \rightarrow q$ biçimindeki önermenin doğru olmasıyla aynı şeydir. Peki buradaki $p \rightarrow q$ önermesi doğru mu? Evet! Çünkü p önermesi yanlış! Hiçbir zaman $x \in \emptyset$ doğru olmaz. Önermeler mantığından biliyoruz ki $p \rightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosu gereği, eğer p yanlışsa, q ne olursa olsun, $p \rightarrow q$ doğru olur. Demek ki $\emptyset \subseteq A$ ifadesinin eşdeğeri olan “Her x için, x eğer boş kümenin içindeyse, x A ’nın içindedir” önermesi doğrudur. Çünkü hiçbir x için, x boş kümenin bir elemanı değildir, boş kümenin hiç elemanı yoktur. Boş kümenin içinde bir eleman olup bu eleman A kümesinde olmasaydı o zaman yanlış olurdu. Ama boş kümenin içinde bir eleman yok. Demek ki önerme yanlış değil. Yanlış değil demek doğru demektir. Yani $\emptyset \subseteq A$ ifadesi de böylece doğrudur.

■ 1 ve $0,9$ Sayıları Birbirine Neden Eşittir?

1’den küçük en büyük reel sayı $0,9$ (yani $0,999 \dots$) değil midir? Reel sayılarla ilgili mevcut tanımlarımıza, varsayımlarımıza ve ilkelerimize göre 1 ve $0,9$ aynı sayılardır. Aynı olmadığını kabul etmek zaten Arşimet özelliğine aykırıdır. *Arşimet özelliği*, verilen herhangi iki pozitif x ve y sayısı için, $xn > y$ özelliğini sağlayan bir n doğal sayısının var olduğunu söyler. Eğer bu iki sayı aynı olmasaydı, $1 - 0,9$ işleminin sonucunun *sonsuz küçük* sayı olması beklenirdi. Yani $0,9$ sayısı, 1’in altındaki en büyük öge olurdu. 1 ile $0,9$ arasında başka bir sayı var olamazdı. Ancak bu sezgilerimize de ters düşüyor. $0,9$ sayısı 1’in altındaki en büyük sayı olsaydı reel sayılarda bir *boşluk* söz konusu olurdu. Sonsuz küçük sayı diye bir şey yoktur. Arşimet ilkesi, sonsuz küçük sayının varlığını yasaklamıştır.

Bu sezgisel açıklama tatmin etmediyse 1’in $0,9$ sayısına eşit olduğunun çeşitli kanıtlarına bakılabilir. Birçok kanıt olmakla beraber, bunlardan biri *limit* tanımıyla şöyle yapılır:

$$0,\bar{9} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0,\underbrace{999 \dots}_{n \text{ tane}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1.$$

Yine tatmin etmediyse basit cebirsel bir kanıt da şöyle verilebilir:

$x = 0,999 \dots$ olsun.

$$10x = 9,999 \dots$$

$$10x = 9 + 0,999 \dots$$

$$10x = 9 + x$$

$$9x = 9$$

$$x = 1.$$

■ Neden $0! = 1$ dir?

Cebirde faktöriyelin doğal sayılar için tanımlı bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Analiz dediğimiz alanda reel sayıların da “faktöriyeli” çeşitli yöntemlerle tanımlanabiliyor ancak biz doğal sayılar üzerinde tanımlanan faktöriyeli göz önünde bulunduralım. Faktöriyelin özyinelemeli tanımına bakalım. Aşağıda soru işaretli yere ne gelmesi gerektiğini bir örnek üzerinden giderek anlayacağız.

$$n! = n \times (n - 1)!$$

$$0! = ?$$

Örneğin, $5!$ ’i bu tanıma göre hesaplayalım.

$$5! = 5 \times 4!$$

$$\Rightarrow 4! = 4 \times 3!$$

$$\Rightarrow 3! = 3 \times 2!$$

$$\Rightarrow 2! = 2 \times 1!$$

$$\Rightarrow 1! = 1 \times 0!$$

Şimdi, bir sayının faktöriyelinin sıfır *olmaması* için hemen yukarıda son satırdaki ifadenin, yani $1!$ ’in sonucunun sıfır *olmaması* gerekir. Demek ki $0! = 0$ olarak tanımlarsak, her sayının faktöriyeli sıfır olur! Bu da anlamsız olur. En iyisi $1!$ ’i tanımlarken, eşitliğin sağında $1!$ ’i çarpmanın birim elemanıya, yani 1 ile çarpmak. Bu yüzden $0! = 1$ olarak tanımlamak, $1! = 1 \times 1$ eşitliğini verir ve diğer tüm sayıların faktöriyeli bize pozitif bir değer vereceği için $0! = 1$ tanımı anlamlı olur. Yani, $0! = 0$ olarak tanımlansaydı her sayının faktöriyeli sıfır olurdu ve bu da oldukça anlamsız olurdu.

■ 0 Neden Bir Doğal Sayıdır?

Matematik tanımlarla ve varsayımlarla başlar. Aritmetik kuramımızın varsayımları *Peano aksiyomları* diye bilinen varsayımlarla tanımlanmıştır. Peano aksiyomlarından burada bahsetmeyeceğiz. Bu aksiyomlar esasen doğal sayılar yapısının özelliklerine sahip tüm yapıların ortak özelliklerini belirten varsayımlardır. Peano aksiyomlarına göre, ‘0’ sembolüyle gösterilen sayı bir doğal sayıdır. Amasız fakatsız bunu kabul ederiz. Yani matematikte “0 bir doğal sayıdır” önermesi aksiyom gereği doğrudur. Doğal sayılar 1’den başlasaydı ne olurdu? Aslında bu çok büyük problemlere neden olmazdı. Bazı teknik tanımların ufak tefek değişmesi gerekirdi. Ama ortada bir yerdeki sayıyı (örneğin 2, 5, 29, 750 gibi) doğal sayı olarak kabul etmeseydik işte o zaman büyük sorunlar ortaya çıkardı. Çünkü 0’ı gözardı ederek doğal sayı *yapısını* yine koruyabiliriz. Yeter ki ortaya çıkan şey Peano aksiyomlarını sağlasın. Peano aksiyomlarını sağlayan matematiksel yapılara zaten *doğal sayı yapısı* diyoruz. Hepsinin ortak özelliği, hiçbir ögenin ardılı olmayan en küçük bir ögenin var olması. Diyelim ki 0’ı doğal sayı olarak kabul etmedik. Sorun değil; 1’den başlarız ve 0’ın doğal sayı yapısı içindeki “en küçük öge” olma rolünü 1’e vermiş oluruz. 0,1,2,3,... yerine 1,2,3,4,... diye devam eden bir yapı elde ederiz. Ne de olsa yine her sayı ardılık ilişkisi içinde ardışık olarak tanımlı. Yine herhangi

ardışık iki doğal sayının arasında başka bir doğal sayı yok. Yine en büyük doğal sayı diye bir şey yok.

Beyin jimnastiği yaptıracak bir şey söyleyeyim. Aslında Peano aksiyomlarını sağlayan yapının öğelerinin birer 'sayı' olmasına da gerek yok. 0'ın rolünü hiç çubuk, 1'in rolünü bir çubuk, 2'nin rolünü iki çubuk, 3'ün rolünü üç çubuk vs. alabilir. Bir çubuğun *ardılı*nı, o çubuğun yanına başka bir çubuk bitiştirmek olarak kabul edelim. Alın size doğal sayılar yapısı!

0 bir doğal sayıdır, aksiyom gereği böyle. Ancak gördüğümüz gibi, aksini düşünmek doğal sayılar yapısını bozan bir şey değildir. 0'ın kendisi olmasa da olur. Yeter ki yapı içinde 0'ın rolünü üstlenecek bir öge olsun. Diyebiliriz ki 0'ı kabul etmek zorunluluk değildir ama 0'ın rolünü alacak bir ögenin var olması bir zorunluluktur.

■ “Tanımsız” ile “Belirsiz” Arasındaki Fark Nedir?

Matematiğin tanımlarla ve aksiyomlarla başladığını söylemiştik. Bazen bir şey tanımlamak, mevcut kuramımızda çelişkilere neden olabilir. Örneğin, $\mathbb{R}$ (yani reel sayılar) üzerinde tanımlı olan $f(x) = 1/x$ fonksiyonunun tanım kümesi aslında $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesidir. Yani $f(0)$ tanımsızdır, çünkü $1/0$ tanımsız bir ifadedir. Verilen bir n sayısı için $n/0$ tanımlı olsaydı ne olurdu? Bir defa bu saçmalıklara sebep olurdu. Diyelim ki $a = b = 1$ olsun. Şimdi $a = b$ eşitliğinin her iki tarafını a ile çarpalım ve $a^2 = ab$ elde edelim. Her iki taraftan ab çıkaralım ve $a^2 - ab = 0$ elde edelim. Bu da $a(a - b) = 0$ ifadesine eşittir. Şimdi eşitliğin her iki tarafını $(a - b)$ ifadesine bölersek $a = 0$ olarak buluruz. Ama başta $a = 1$ olarak kabul etmiştik. Saçmalık elde ettik. $n/0$ ifadesi aritmetikte ya da cebirde anlamlı bir şekilde tanımlanamaz. Sıfıra bölmeyi geçerli kabul edersek işte böyle çelişkiler bulabiliriz. Analizde ise $n/0$ ifadesi ∞ olarak tanımlıdır, ancak orada fonksiyonların limitteki davranışını dikkate alırız.

Peki, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin reel sayılarda çözümünün olmadığını biliyoruz. Ancak sonradan $i = \sqrt{-1}$ diye bir sayı tanımlamışız. Aynen bunun gibi $n/0$ ifadesinin sonucunu yapay bir şekilde tanımlayamaz mıyız? Tanımlayabiliriz elbette. Şimdi ben yeni bir “sayı” tanımlıyorum ve adına h diyorum. Bu bildiğimiz anlamda bir sayı değil, bir değer de değil, bir sabit olsun belki. Artık $n/0$ tanımlı bir ifade. Tamam ama ne işime yaradı bu? İşte, matematikte istediğiniz şeyi (mevcut kuramlarınızla tutarlı olmak kaydıyla) tanımlayıp kendi matematiğinizi yapabilirsiniz. Ancak bunu dünya kabul edecek diye bir şey yok. Tanımsız ifadeleri geleneksel anlamda tanımlamaya çalıştığımızda yukarıda yaptığımız kanıt gibi ortaya anlamsızlıklar çıkarabiliriz. Bir şeyin tanımsız olması demek, “anlamlı” bir açıklaması yapılamaz demektir. Elbette kafamızdan bir sembol uydurup, buna örneğin h ismi verip, bunu $n/0$ 'nin tanımı olarak kabul edebiliriz. Ancak bu hiçbir işimize yaramaz, en azından şu anda.

Belirsizlik ise biraz daha farklı bir kavram. Bir ifadenin tek değil, birçok (çoğunlukla sonsuz sayıda) anlamlı tanımı varsa ya da birçok çözümü varsa buna *belirsizlik* diyebiliriz. Örneğin, $\infty - \infty$ ifadesinin tek bir anlamlı sonucu yoktur. Olamayacağını burada sadece sezgisel olarak anlatmaya çalışacağım. Bu fark işleminin sonucu neden 1 olmasın? Ya da neden 2, 3, 4 vs. olmasın? Kümelerle anlamaya çalışalım. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ olsun. Buna göre $A \setminus B = \{0\}$ olur ki bu da tek elemanlıdır. Ancak $B = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ olsaydı $A \setminus B = \{0, 1\}$ olurdu ki bu da bize 2 elemanlı bir küme verirdi. Şimdi $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ve $B = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ olsun. Bu durumda $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ olur ki bu da sonsuz elemanlı bir küme verir. Demek ki kümelerle uygulandığında $\infty - \infty$ ifadesinin tek bir sonucu tanımlanamıyor. Analizde de durum farksız değildir.

■ 0^0 Neye Eşittir?

Negatif olmayan herhangi bir a sayısı için a^0 ifadesinin cebirsel olarak ne tür anlamlara karşılık geldiğine bakalım. a^0 ifadesi a sayısının 0 kez çarpımıdır; yani hiçbir şey çarpmamaktır. Çarpmanın birim elemanı 1 olduğu için, cebirde $0^0 = 1$ tanımı yapılmıştır. Küme kuramsal olarak da a^0 ifadesini yorumlamak mümkündür; şöyle ki a^0 ifadesi, 0 elemanlı bir kümeden a elemanlı bir kümeye olan fonksiyonların sayısıdır. Böyle sadece bir tane fonksiyon vardır, o da *boş fonksiyon* denilen fonksiyondur.

Öte yandan analizde 0^0 ifadesi belirsiz forma sahiptir. Yani, $f(x)$ ve $g(x)$ birer fonksiyon olsun ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ olsun. Bu durumda $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ ifadesinin sonucunu her zaman tek biçimde belirleyemeyiz. Örneğin, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^0 = 1$ iken, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 0^x = 0$ oluyor. Bu yüzden 0^0 ifadesini

matematiğin bazı alanlarında 1 olarak tanımlamak anlamlıyken, analiz gibi diğer alanlarda anlamlı bir tanımlama yapmak mümkün olmayabiliyor.

■ Tam Sayıların Toplamı Sıfır Mıdır?

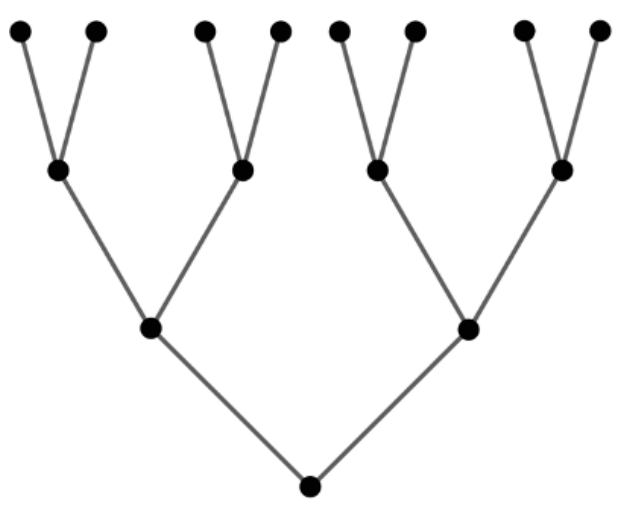
Pozitif ve negatif sayılar birbirini götürdüğü için bütün tam sayıların toplamının sıfır olduğunu zannedebilirsiniz. Ancak sonsuz toplamda işler sanıldığı gibi olmuyor. Elbette

$$0 + 1 + (-1) + 2 + (-2) + 3 + (-3) + \dots$$

gibi bir parantezleme yapılırsa pozitif sayılar ve negatif sayılar birbirini götürür ve sonuç sıfır olur diye düşünürsünüz. Ancak

$$(0 + 1) + (-1 + 2) + (-2 + 3) + (-3 + 4) + \dots$$

şeklinde bir parantezleme yapılırsa bu toplam sonsuza yaklaşır. İddia ediyorum ki başka türlü parantezleme yapıldığında toplam, eksi sonsuza yaklaşır. İşin özü, sonsuz toplam sonlu toplam sezgisiyle tanımlanabilecek bir işlem değildir. Sonlu şeyler arasındaki özellikleri, onlarla ilgili kullandığımız sezgileri sonsuz büyüklükteki şeylere her zaman uyarlayamayacağımızı gösteren bir başka örnek vermek istiyorum. Matematikteki ağaç yapılarını ele alalım.



Bu yapının sonsuza kadar yukarı doğru devam ettiğini düşünelim. En alttaki başlangıç noktasının hızası 0. kademe olsun. 1'inci kademedede 2 nokta, 2'nci kademedede 4 nokta, 3'üncü kademedede 8 nokta var vs. Genellersek, n 'inci kademedede 2^n nokta var. Hatta, n 'inci kademeye kadarki dalların sayısı, n 'inci kademedeki noktaların sayısından daha fazla. Örneğin, 2'nci kademedede 4 nokta varken bu kademenin altında toplamda 6 dal var. Matematiksel tümevarımla her sonlu n için bunun doğru olduğunu kanıtlayabiliriz. Ancak n sonsuza yaklaştığında aynı sonucu söylemek mümkün değil. Sonlu durumlar için olan bazı matematiksel gerçeklerin altındaki sezgilerimizi, sonsuzdaki ya da sonsuza yaklaşırken olan durumlara uygulamak bizi hataya sevk edebiliyor.

■ 1^∞ Neden Belirsizdir?

Herhangi bir n doğal sayısı için $1^n = 1$ olduğunu biliyoruz. Ancak analizde, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ değeri belirsizdir. Bunun sebebi, bu limit değerinin, taban olan $f(x)$ 'in 1'e ne kadar hızlı yaklaştığına ve üs olan $g(x)$ 'in sonsuza ne kadar hızlı büyüdüğüne bağlı olmasıdır. 1^∞ ifadesinin belirsiz olduğunu anlamak için önce şu örneğe bakalım: $c \in \mathbb{R}$ olsun. Buna göre $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x)^{\frac{c}{x}}$ değeri ne olmalıdır? Taban 1'e yaklaşırken üs (pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak) $\pm\infty$ 'a yaklaşır. 1^∞ formuna sahip bu limiti hesaplamak neyse ki zor değil. Üs özelliklerini kullanarak

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x)^{\frac{c}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \frac{c}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^c = e^c.$$

Herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ için bu limitin değeri değişiyor. Elbette taban 1 ile sabit olduğu zaman $\lim_{x \rightarrow \infty} 1^\infty = 1$ olur. Ancak buradaki mesele, yukarıda söz ettiğimiz gibi, $f(x)$ fonksiyonunun 1'e soldan veya sağdan durumlarda $g(x)$ üs fonksiyonunun limit değerini farklı şekilde belirlemesidir. Örneğin, $\lim_{x \rightarrow \infty} 0,999^x = 0$ iken, $\lim_{x \rightarrow \infty} 1,001^x = \infty$ olur. Taban 1'e yaklaşırken üs sonsuza yaklaştığında bu uyumsuzluktan dolayı 1^∞ formu belirsizdir.