

İyi Temellendirilmemiş Kümeler

SEBAHATTİN EMRE ŞAHİN

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü, 4. Sınıf Öğrencisi

✉ emresahinmath@gmail.com



20. yüzyılın ortalarında Zermelo ve Fraenkel, matematiği tutarlı bir temele oturtmak amacıyla ZFC aksiyomatik sistemini ortaya atmışlardır. Aksiyomların ifade ettikleri kavramlar ilk bakışta basit görünse de, birçok matematikçi bu aksiyomlar üzerine derinlemesine düşünmüş ve bunları tartışmıştır. ZFC üzerine farklı amaçlara yönelik yeni aksiyom sistemleri önerilmiş, kümeler kuramının sınırları bu tartışmalar aracılığıyla genişlemiştir. Bu tartışmaların merkezinde, ZFC'nin bir aksiyomu olan Temellendirme Aksiyomu da yer almaktadır. Temellendirme Aksiyomu, en yalın ifadeyle, bir kümenin kendi içinde sonsuz bir elemanlık döngüsü oluşturmasını engelleyerek kümelerin "iyi temellendirilmiş" olmasını sağlar. Bu makalede, Temellendirme Aksiyomu'nun reddedilmesiyle ortaya çıkan iyi temellendirilmemiş kümeler üzerine bazı temel okumalar sunulmakta, bu kümelerin sahip olduğu ilginç özellikler tartışılmakta ve klasik küme kuramının ötesine geçen yaklaşımlara dair örnekler verilmektedir.

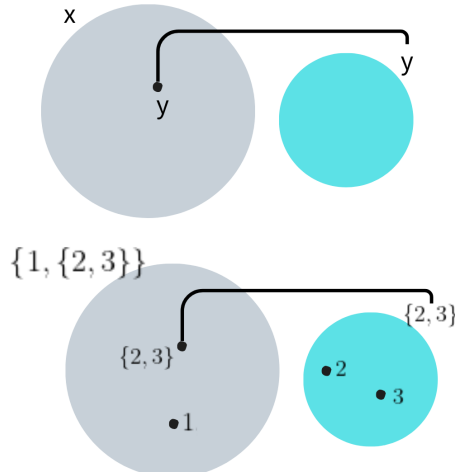
1. Temellendirme Aksiyomu

Bu yazıda, küme teorisi kitaplarındaki yerleşik notasyonlara sadık kalınarak, kümeler küçük harflerle (x, y, z gibi) ifade edilecektir. Ayrıca, klasik ZFC çerçevesine uygun olarak, kümelerin elemanlarının da yine kümeler olduğu varsayılacaktır.

Temellendirme Aksiyomu: $\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (y \cap x = \emptyset))$.

Yukarıdaki ifade, Temellendirme Aksiyomu'nun doğrudan kendi ifadesidir. Daha anlaşılır biçimde ifade etmek istersek: "Boş kümeden farklı her kümenin, kendisiyle kesişmeyen bir elemanı vardır." Bu aksiyomu ilk gördüğümüzde akla şu sorular gelebilir: Aynı anda $y \in x$ ve $y \cap x = \emptyset$ nasıl mümkün olabilir? ZFC aksiyomatik sistemi çelişkili mi? Eğer öyleyse, dünya yok mu olacak?

Sakinleşip bir bardak su içtikten sonra bu kafa karışıklığının sebebini açıklayalım. Bunun nedeni alışık olduğumuz notasyondan farklı bir notasyon kullanıyor olmamız. y, x kümesini bir elemanı ve y de kendi başına ayrı bir kümedir.



Teorem 1.

Herhangi bir x kümesi için $x \notin x$ olur.

Kanıt. Aksine, $x \in x$ olacak şekilde bir x kümesi var olsun. Bu durumda $\{x\} \neq \emptyset$ olur. Temellendirme Aksiyomundan ötürü $x \cap \{x\} = \emptyset$ olmalı. Ancak, $x \cap \{x\} \neq \emptyset$. $\square$

Temellendirme Aksiyomu'nun bir sonucu olan bu teorem, doğrudan Russell Paradoksu'yla ilişkilidir. Bir sonraki alt başlıklarda Russell Paradoksu'nu daha ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

1.1. Russell Paradoksu

- $R = \{x \notin x\}$ kümesini inceleyelim. R kümesini, elemanları kendi kendini içermeyen kümeler olarak ifade edebiliriz. Fakat,

$$R \in R \Rightarrow R \notin R$$

$$R \notin R \Rightarrow R \in R$$

20. yüzyılda Russell tarafından ortaya atılan bu paradoksun temelinde, bir önermenin kendisine referans vermesi yatıyordu. Bu nedenle, matematiğin kendi içinde çelişkisizliğini sağlamak amacıyla, kendi kendine referans veren (döngüsel) yapılardan kaçınılması gerekiyordu. Bu yaklaşımın bir sonucu olarak, ZFC kümeler kuramında yer alan Temellendirme Aksiyomu, bu tür döngüsel kümelerle izin vermez (bkz. Teorem 1)

Ancak 20. yüzyılın sonlarına doğru, özellikle mantıksal paradokslar ve bilgisayar bilimi gibi alanlarda döngüsel yapılarla daha sık karşılaşmaya başlandı. Gerçekten de dikkatli bir şekilde ele alınmadıkla- rında bu tür döngüsellikler çelişkilere yol açabilir. Bununla birlikte, her döngüsel yapı çelişki doğurmaz. Dolayısıyla, uygun bir küme kuramı içerisinde bu yapıların temsil edilmesi gerekmektedir.

Temellendirme Aksiyomu olmadan kümeler kuramını araştıran birçok küme kuramcısı olmuştur; ancak bu çalışmalar, dönemin ana akım matematikçileri tarafından pek ciddiye alınmamıştır. Bu vizyoner isimler arasında M. Boffa, M. Forti, L. Gordeev ve F. Honsell yer almaktadır. Bununla birlikte, yakın döneme kadar bu alanda en sistemli yaklaşımı Peter Aczel'in çalışmaları sunmuştur. Bu yazının temel kaynağı da Peter Aczel'in *Non-Well-Founded Sets* kitabıdır.

İyi temellendirilmemiş bir kümeler kuramının gerekliliğini göstermek için bir örnek inceleyelim.

Örnek 1.**Veri Dizgisi/Akısı (Streams)**

Veri dizgisi (stream) kavramı genellikle bilgisayar bilimlerinde karşımıza çıkar ve özellikle sonsuz veri dizilerini tanımlamak için kullanılır.

Bir dizgi (stream), sezgisel olarak, bir sonlu değer a (örneğin bir sayı, karakter, sembol vb.) ile başka bir s' dizgisinin oluşturduğu sıralı çift $\langle a, s' \rangle$ şeklinde tanımlanır. Bu yapı, sonsuz veri dizilerini temsil etmekte kullanılır.

Tanım 1. (Kurtowski)

x ve y kümeler olmak üzere, $\langle x, y \rangle$ sıralı ikilisi şu şekilde tanımlanır:

$$\langle x, y \rangle = \{x, \{x, y\}\}.$$

Bir bilgisayar, bir veri dizgisini tanımlamak için genellikle özyinelemeli (rekürsif) fonksiyonlar kullanır. Örneğin, $f(n) = \langle n, f(n+1) \rangle$ biçimindeki bir tanım aracılığıyla, $n = 0$ için $\langle 0, \langle 1, \langle 2, \dots \rangle \rangle \rangle$ şeklinde bir veri dizgisi elde edilir.

Tanım 2.

A bir atomlar kümesi (sayılardan veya karakterlerden oluşan sonlu değerler) olmak üzere, $St(A)$ atomlardan oluşan tüm akışların kümesi olarak tanımlanır; eğer $s \in St(A)$ ise, o zaman $s = \langle a, s' \rangle$ olur, burada $a \in A$ ve $s' \in St(A)$ olur.

Teorem 2.

Temellendirme Aksiyomunu varsayalım. Herhangi iki x ve y kümeleri için, $x \neq \langle x, y \rangle$ ve $y \neq \langle x, y \rangle$.

Kanıt. Aksine, $x = \langle x, y \rangle = \{x, \{x, y\}\}$ veya $y = \langle x, y \rangle = \{x, \{x, y\}\}$ olsun. Bu durumda $x \in x$ veya $y \in y$ olur. Bu da Temellendirme Aksiyomu ile çelişir. $\square$

Teorem 3.

Temellendirme Aksiyomunu varsayalım. R ve S herhangi iki bağıntı olmak üzere, eğer bir a elemanı R bağıntısı altında S bağıntısına taşınıyorsa (aRS), o zaman hiçbir b elemanı yoktur ki b elemanı S bağıntısı altında R 'ye taşınınsın. (bSR).

Kanıt. Aksine, aRS ve bSR , yani $\langle a, S \rangle \in R$ ve $\langle b, R \rangle \in S$ olsun.

$$S \in \langle a, S \rangle \in R \in \langle b, R \rangle \in S.$$

Bu durum, Temellendirme Aksiyomu ile çelişir. $\square$

Sonuç 1.

Temellendirme Aksiyomunu varsayalım. O zaman $St(A) = \emptyset$.

Bu durum, sezgisel kavrayışımız ile matematiksel modelimiz arasında oldukça ciddi bir uyumsuzluk olduğunu gösterir. Sonuç olarak, eğer veri dizgiler gibi kendine referans veren sistemlerle çalışmak istiyorsak Temellendirme Aksiyomu çok da işimize yaramıyor.

2. Kümelerin Resmini Çizebilir misin, Abidin?

Burada çizmek istediğimiz kümeler, ilkokuldaki gibi elmalar, armutlar içeren Venn diyagramları değildir. Çünkü bu tür çizimler, “elma” kümesinin içindeki molekülleri, onların içindeki atomları ve atom altı parçacıkları bize gösteremez. Elma örneğini bir kenara bırakalım; çok daha iyi bildiğimiz bir kümenin resmini çizmeyi deneyelim.

Doğal sayıların inşasındaki ana fikir, n doğal sayısını, n elemanlı bir küme olarak tanımlamaktır. Bu fikri kullanırken, elimizdeki tek küme olan boş kümeye ardıl işlemi uygulayarak kümedeki eleman sayısını artırırız.

Tanım 3.

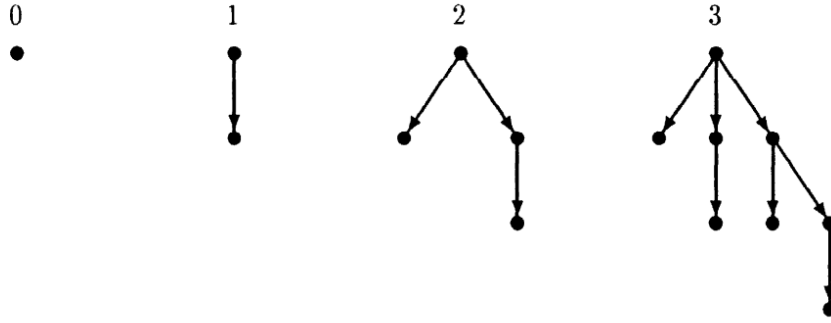
x bir küme olmak üzere $s(x) = x \cup \{x\}$.

$$0 = \emptyset$$

$$1 = s(0) = \{0\} \cup 0 = \{\emptyset\}$$

$$2 = s(1) = \{1\} \cup 1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = s(2) = \{2\} \cup 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$



Kümelerin elemanlarını yönlendirilmiş doğru parçaları (oklar) ile temsil ettiğimizde ortaya çıkan yapı bir ağaç oluşturur. Örneğin, 2 kümesinden $\{1\}$ ve 1 kümelerine doğru çizilen oklar, 2 kümesinin tam olarak $\{1\}$ ve 1 elemanlarına sahip olduğunu gösterir.

2.1. Temellendirme Karşıtı Aksiyomu (TKA)

Karşıt Temellendirme Aksiyomuna geçmeden önce Aczel'in terminolojisindeki önemli tanımları verelim.

- Yönlü bir çizgede, herhangi bir n_0 noktasından başlayıp çizgenin her noktasına bir yol varsa **erişilebilir** (ing. accessible) olarak adlandırılır.

$$n_0 \rightarrow n_1 \rightarrow \dots \rightarrow n$$

- Bir çizge için **süsleme** (ing. decoration), çizgenin her noktasına bir kümenin atanmasıdır.

Bir erişilebilir çizge için eğer içinde sonsuz yollar veya döngüler yoksa **iyi temellendirilmiş** (ing. well-founded) olarak adlandırılır. Mostowski'nin Çökertme Lemması (ing. Collapsing Lemma), her iyi temellendirilmiş çizgenin tek bir süslemeye sahip olduğunu belirtir.

Karşıt Temellendirme Aksiyomu: Her işaretli erişilebilir çizge benzersiz bir kümeyi temsil eder.

Aczel'in Temellendirme Karşıtı Aksiyomu (TKA), her işaretli ve erişilebilir çizgenin, iyi temellendirilmiş olsun ya da olmasın, tekil bir kümenin resmini verdiğini belirtir. Temellendirme Karşıtı Aksiyomu'nun iki sonucu vardır: varlık ve tekillik.

- Her işaretli erişilebilir çizgenin bir süslemeye sahip olduğunu garanti eder (bu da iyi temellendirilmiş olanlar dışında kötü temellendirilmiş kümelerin de var olmasına yol açar)
- Hiçbir işaretli ve erişilebilir çizgenin birden fazla süslemeye sahip olamayacağını belirtir.

ZFC 'den Temellendirme Aksiyomu'nu çıkarıp (ve bu şekilde ortaya çıkan sisteme ZFC^- ile gösterilir) TKA'yı eklediğimizde Hiperküme Teorisi (ing. Hyperset Theory) elde edilir.

Örnek 2.

İki iyi temellenmemiş (non-well-founded) kümeyi ele alalım:

$$a = \{\text{Zermelo}, a\}, \quad b = \{\text{Zermelo}, b\}.$$

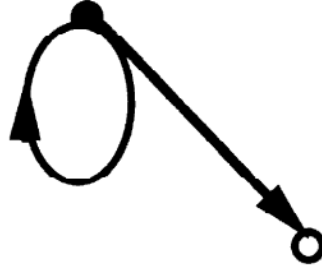
Peki, a ve b kümeleri eşit midir değil midir?

İyi temellenmiş küme kuramında, bu tür bir sorunun cevabı kolayca, Eşitlik Aksiyomu (ing. Axiom of Extensionality) uygulanarak elde edilir: İki küme, ancak ve ancak aynı elemanlara sahiplerse eşittir.

Ancak mevcut durumda, bu aksiyom yalnızca şu sonuca götürür:

$$a = b \text{ ancak ve ancak } a = b.$$

Dolayısıyla, iyi temellenmemiş kümeler söz konusu olduğunda Temellendirme Karşıtı Aksiyomundan yararlanmakta fayda var.



Zermelo

Her iki küme de aynı çizmeyi oluşturur. Sonuç olarak, bu iki küme (KTA) aynı tek kümedir.

2.2. Peki Russell Paradoksuna Ne Oldu?

Temellendirme Karşıtı Aksiyomundan sonra şu sorular aklımıza gelebilir:

Russell paradoksu ve kendini referans veren diğer paradokslar ne olacak? Temellendirme aksiyomu bizi bu tür şeylerden kurtarmak için alınmamış mıydı? Karşıt Temellendirme Aksiyomunu kabul edersek bunlar geri gelmez mi?

Kendini içeren bir küme örneği denilince akla genellikle “tüm kümelerin kümesi” gibi Russell kümeleri gelir. Ancak daha basit örnekler de vardır. Örneğin:

$$x = \{1, x\}$$

şeklinde kendini içeren daha basit kümeler de bulunur. Kendini içeren kümelere dair doğal örnekler vardır ve bu örnekler tanıdık hale geldikçe yapay olmaktan çıkarlar. Bu bölümde, iyi-temellendirilmemiş kümelerin tutarsız olmadığını, aksine tutarlı bir şekilde var olabileceklerini göstereceğiz.

Herhangi bir b kümesi verildiğini varsayalım, ister iyi-tanımlanmış ister iyi-tanımlanmamış olsun. Seçim Aksiyomu, b içindeki istediğimiz alt kümeleri seçmemize izin verir. b kümesi için Russell kümesini aşağıdaki biçimde oluşturabiliriz:

$$z_b = \{x \in b \mid x \notin x\}.$$

Russell’ın argümanına tekrar dönecek olursak, $z_b \in z_b$ ve $z_b \notin z_b$ arasında bir çelişki ortaya çıktığını biliyoruz. Ancak iyi temellendirilmemiş kümeleri içeren teorilerde, $z_b \in z_b$ mümkün olduğu için bu durumda bir çelişki oluşmaz. Çünkü artık $z_b \in z_b \Rightarrow z_b \notin z_b$ olması gerektiğine dair bir zorunluluk yoktur.

Aşağıdaki tabloda bazı iyi temellendirilmemiş kümeler için z_b kümelerini bulalım.

b	$z_b = \{x \in b \mid x \notin x\}$
$\Omega = \{\Omega\}$	$\emptyset$
$b = \{1, b\}$	$\{1\}$
$b = \{0, \{1, b\}\}$	$\{0, \{1, b\}\}$

Son örneğin biraz kafa karıştırıcı olduğunu kabul etmek gerekir. $b = \{0, \{1, b\}\}$ kümesi iyi temellendirilmemiştir; ancak buna rağmen, iyi temellendirilmiş bir küme gibi $z_b = b$ sonucu ortaya çıkmıştır. Bunun sebebi, diğer küme örneklerinde doğrudan kendilerini içerirken ($b = \{1, b\}$ gibi), $b = \{0, \{1, b\}\}$ kümesi dolaylı olarak kendisini içerir (elemanın elemanı olarak). Hatta böyle kümeleri incelemek için aşağıdaki gibi kümeler inşa edilebilir:

Tanım 4.

x ve z birer küme olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullardan en az biri sağlanıyorsa, z kümesine x 'in bir bileşeni (ing. constituent) denir ve bu ilişki $z \in^* x$ şeklinde gösterilir.

- z, x kümesinin bir elemanıdır: $z \in x$,
- z, x kümesinin bir elemanının elemanıdır: $z \in t_0$ ve $t_0 \in x$,
- z, x kümesinin bir elemanının, bir elemanının, ..., bir elemanının elemanıdır; yani $z \in t_0 \in t_1 \in \dots \in t_n \in x$ olacak şekilde bir zincir mevcuttur ve bu zincir sonsuza kadar devam edebilir.

Bu tanım sayesinde, Russell kümelerini aşağıdaki şekilde revize ederek yeniden inceleyebiliriz.

$$w_b = \{x \in b \mid x \notin^* x\}$$

$$v_b = \{x \in^* b \mid x \notin^* x\}$$

Buradan z_b hakkında bazı çıkarımlarda bulunabiliriz.

Sonuç-1. b iyi temellendirilmemiş bir küme olmak üzere, $z_b \notin b$.

Sonuç-2. b iyi temellendirilmemiş bir küme olmak üzere, hiçbir küme tüm alt kümelerini eleman olarak içeremez.

Sonuç-3. b iyi temelli bir küme olmak üzere $z_b = b$.

■ Kaynaklar

- [1] J. Bell, “Peter aczel. non-well-founded sets. with a foreword by jon barwise. csli lecture notes, no. 14. center for the study of language and information, stanford1988, also distributed by the university of chicago press, chicago, xx+ 131 pp.,” The Journal of Symbolic Logic, vol. 54, no. 3, pp. 1111–1114, 1989.
- [2] M. Boffa, “Peter aczel, jon barwise, non-well-founded sets,” 1989.
- [3] M. Pakkan and V. Akman, “Hypersolver: A graphical tool for commonsense set theory,” Information Sciences, vol. 85, no. 1-3, pp. 43–61, 1995.
- [4] J. Barwise and L. Moss, “Hypersets,” The Mathematical Intelligencer, vol. 13, no. 4, pp. 31–41, 1991.
- [5] A. Nesin, “Kümeler kuramı 1,” Nesin Yayıncılık, pp. 21–22, 2010.
- [6] B. Kaya, “MATH 320: Set Theory Lecture Notes,” Middle East Technical University, Ankara, Turkey, Lecture Notes, 2018, Spring 2018, used Hrbacek & Jech as main reference. [Online]. Available: <https://users.metu.edu.tr/burakk/lecturenotes/320lecturenotes.pdf>
- [7] R. Grausi, “Non well-founded set theory,” Universit“ at Hamburg, Project on Alternative Set Theories, Lecture notes / preprint, 2025, Consistent proof of ZF + AFA based on graphical systems. [Online]. Available: <https://www.math.uni-hamburg.de/home/khomskii/ALST/romain.pdf>