

Karmaşık Sayılar ve Düzlem Geometrisi

UĞUR GÜL

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ gulugur@hacettepe.edu.tr



Bu yazıda Kartezyen düzlem $\mathbb{R}^2$ 'deki herhangi bir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktasını karmaşık düzlemdeki $z := x + iy \in \mathbb{C}$ noktasına eşleyerek ve karmaşık sayıların üzerindeki standart toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini kullanarak düzlem geometrisindeki birtakım sonuçları elde edeceğiz. Bu sonuçlar bir üçgenin alanını kenar uzunlukları cinsinden veren Heron formülü, köşeleri aynı çember üzerindeki bulunan bir dörtgenin kenar uzunluklarının sağlaması gereken şartı belirten Batlamyus Teoremi ve herhangi bir dörtgeninin kenarları üzerinde kurulan karelerin merkezleri karşılıklı birleştirildiğinde oluşan doğru parçalarının uzunluklarının eşit olduğunu ve birbirlerine dik olduklarını söyleyen Van Aubel Teoremidir.

1. Karmaşık Sayılar

1.1. Karmaşık Sayıların Tanımı

Bu kısımda karmaşık sayıların tanımını yapacağız. Karmaşık sayıları oluşturan temel fikir gerçel sayı sistemi $\mathbb{R}$ 'ye $i^2 = -1$ denklemini sağlayan bir sayı ilave etmektir. Hiçbir gerçel sayının bu denklemi sağlayamayacağı aşikardır, zira $x \in \mathbb{R}$ ise $x^2 \geq 0$ olduğundan $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ olur. Yani $x \in \mathbb{R}$ olduğunda hiçbir zaman $x^2 + 1 = 0$ olamaz. Gerçel sayılar kümesine dahil olmayan bu “farazi” i sayısına **sanal (imajiner) sayı** denir.

Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'ye $i^2 = -1$ denklemini sağlayan sanal bir i sayısı eklersek

$$\mathbb{R}[i] := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k i^k : a_k \in \mathbb{R}, i^0 = 1 \right\}$$

halkasını elde ederiz. Bir $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ polinomunun derecesi $\deg(p) \geq 2$ ise bölme algoritması uygulayarak

$$p(x) = (x^2 + 1)q(x) + r(x)$$

elde edilir ki burada q bir polinom ve r derecesi en fazla 1 olan bir polinomdur, yani $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $r(x) = bx + a$ şeklindedir. Bu durumda

$$p(i) = \sum_{k=0}^n a_k i^k = (i^2 + 1)q(i) + r(i) = r(i) = a + ib$$

sağlanır. O hâlde

$$\mathbb{R}[i] := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k i^k : a_k \in \mathbb{R}, i^0 = 1 \right\} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

dir. Bu sayı sistemine

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[i] = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

karmaşık sayılar sistemi denir.

Bir $z \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısının, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z = a + ib$ şeklinde tek bir gösterimi vardır, yani $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ iken $z = a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$ ise $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ sağlanır ki bu da $a, b \in \mathbb{R}, a + ib = 0 \Rightarrow a = b = 0$ olmasına denktir: Varsayalım ki $a + ib = 0$ fakat $a \neq 0$ veya $b \neq 0$ olsun, genelliği kaybetmeden

$b \neq 0$ varsayabiliriz, o halde $ib = -a \Rightarrow i = -\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = -1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, yani bir $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ için $r^2 = -1$ olur ki bu da bir çelişki doğurur. O halde $a + ib = 0$ ise $a = b = 0$ olmalıdır.

Karmaşık sayılar kümesinde iki tane $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2$ sayıları aldığımızda onların toplamını aşağıdaki gibi yaparız:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Örnek 1.

$z_1 = 1 + 3i$ ve $z_2 = 4 - 2i$ ise

$$z_1 + z_2 = (1 + 4) + i(3 + (-2)) = 5 + i$$

olur.

Çarpmayı da en doğal şekliyle aşağıdaki gibi yapabiliriz:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Örnek 2.

$z_1 = 2 + 3i$ ve $z_2 = 3 + 4i$ ise

$$z_1z_2 = (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4) + i(2 \cdot 4 + 3 \cdot 3) = -6 + 17i$$

olur.

Bu işlemlerle $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kümesi bir cisim oluşturur: Yani $(\mathbb{C}, +)$ değişmeli bir gruptur, aynı şekilde $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ de değişmeli bir gruptur ve toplama işlemi çarpma işlemi üzerinden dağılma özelliğine sahiptir:

$$z_0(z_1 + z_2) = (z_1 + z_2)z_0 = z_0z_1 + z_0z_2 \quad \forall z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

denklemini sağlar.

Bir $z = x + iy$ karmaşık sayısı için x 'e z 'nin **gerçel kısmı**(İng. real part), y 'ye de **sanal kısmı**(İng. imaginary part) denir ve

$$x = \Re(z) \quad y = \Im(z)$$

şeklinde gösterilir. İki karmaşık sayı eşittir ancak ve ancak gerçel ve sanal kısımları birbirine eşittir. Bir $z = x + iy$ karmaşık sayısı verildiğinde $\bar{z} = x - iy$ karmaşık sayısına z 'nin **karmaşık eşleniği**(İng. complex conjugate) denir. Karmaşık eşlenik almanın toplama üzerinde dağıldığı aşikardır:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

Karmaşık eşlenik alma çarpma üzerinde de dağılır:

$$\begin{aligned} \overline{(z_1z_2)} &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1(-y_2) + x_2(-y_1)) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1\bar{z}_2 \end{aligned}$$

Bir karmaşık sayı gerçeldir ancak ve ancak karmaşık eşleniği kendisine eşittir. Daha genel olarak bir karmaşık sayının gerçel ve sanal kısımlarının kendisi ve eşleniği cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (1)$$

Karmaşık eşlenik iki karmaşık sayıyı birbirine bölmek istediğimizde çok işimize yarar, çünkü $z = x + iy$ için

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

olduğundan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ verildiğinde eğer $z_2 \neq 0$ ise

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

gerçekleşir.

Örnek 3.

$z_1 = 3 + 4i$ ve $z_2 = 2 + i$ ise

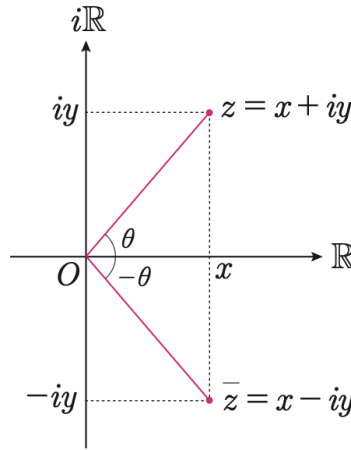
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3.2 + 4.1) + i(4.2 - 3.1)}{2^2 + 1^2} = 2 + i$$

olur.

Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ 'yi Kartezyen düzlem $\mathbb{R}^2$ olarak görmek çoğu zaman büyük avantaj sağlar. Bu aşağıdaki eşleştirmeye sağlanır:

$$x + iy \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Bu eşleştirmeye $\mathbb{R}^2$ Kartezyen düzlemindeki y ekseni sanal eksene dönüşür. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ 'nin bu eşleştirme kullanılarak yapılan geometrik gösterimine **karmaşık düzlem** (İng. complex plane) denir.



1.2. Mutlak Değer

Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ 'yi $\mathbb{R}^2$ Kartezyen düzlemi ile özdeşleştirdikten sonra $\mathbb{R}^2$ 'ye konulan norm $\mathbb{C}$ 'nin üzerine de doğal olarak konulabilir:

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ olsun,

$$|z| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

şeklinde tanımlanan $|z|$ niceliğine z 'nin **mutlak değeri** (İng. absolute value) denir. Mutlak değer en önemli özelliği pozitif bir nicelik olmasıdır. Yani $|z| \geq 0$ eşitsizliği bütün $z \in \mathbb{C}$ için sağlanır. Ayrıca $|z| = 0$ dır ancak ve ancak $z = 0$ dır. Bir önceki kısımdaki (2) no'lu denklemden $|z|$ ile z 'nin karmaşık eşleniği arasındaki aşağıdaki münasebet anında farkedilir:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Bu denklemden ve (2) numaralı denklemden $|\cdot|$ niceliğinin de çarpma üzerinden dağıldığını rahatlıkla görebiliriz:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = (z_1 z_2) \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2 \quad (3)$$

Ayrıca

$$|\bar{z}| = |z|$$

olduğunu görmek zor değildir.

Örnek 4.

$z_1 = 3 + 4i$ ve $z_2 = 2 + i$ ise

$$|z_1| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

ve

$$|z_2| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

dir.

Bu $|\cdot|$ niceliğine mutlak değer denilmesi tesadüf değildir zira $\mathbb{R}$ 'deki mutlak değer bir nevi genişlemesidir: Eğer $z = x + iy$ 'de $y = 0$ alınırsa $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ olur. Gerçek sayılar $\mathbb{R}$ 'deki mutlak değer üçgen eşitsizliği dediğimiz aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Aynı eşitsizliğin doğru olmasını karmaşık sayılarda da bekleyebiliriz:

Teorem 1. (Üçgen Eşitsizliği)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Kanıt.

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2$$

Bir önceki kısımdaki (1) no'lu denklemden ($z = z_1\bar{z}_2$ alınarak)

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\Re(z_1\bar{z}_2)$$

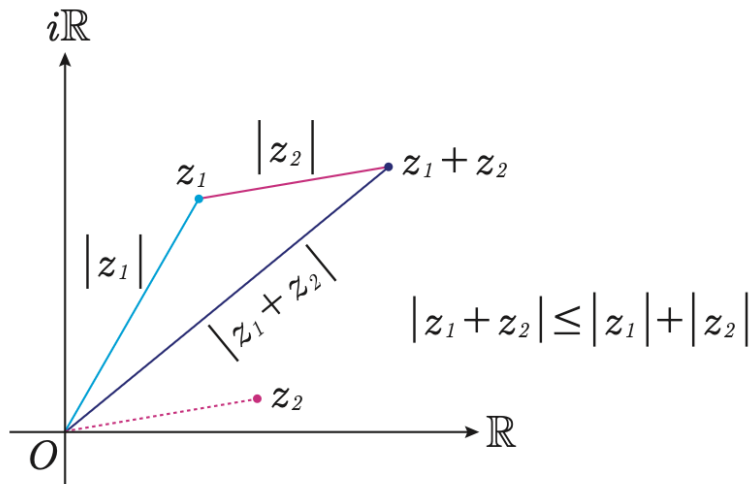
ve her $z \in \mathbb{C}$ için

$$|\Re(z)| \leq \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2} = |z|$$

olduğundan ve (3) no'lu denklemden

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1\bar{z}_2) \leq \\ &|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|(z_1\bar{z}_2)| = \\ &|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

elde edilir ki bu da üçgen eşitsizliğini kanıtlar. $\square$



1.3. Kutupsal Gösterim

Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ 'yi Kartezyen düzlem $\mathbb{R}^2$ ile özdeşleştirdikten sonra $\mathbb{R}^2$ üzerindeki kutupsal koordinatları $\mathbb{C}$ üzerine de koyabiliriz. İlk önce kutupsal koordinatları hatırlayalım: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

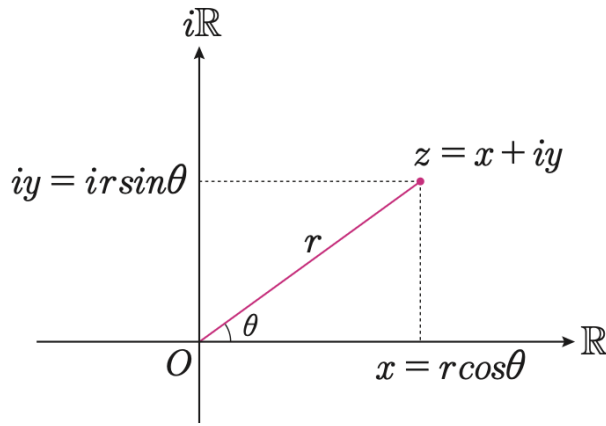
olarak yazdığımızda $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, (x, y) 'nin orjine olan uzaklığını ve θ ise x -ekseni ile yaptığı açıyı verir. Eğer $z = x + iy$ için yukarıdaki denklemden x ve y 'yi yerine koyacak olursak

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

elde edilir. $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ olduğu hatırlanırsa

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

olur.



Bir karmaşık sayının bu şekilde yazılmasına onun **kutupsal gösterimi** (İng. polar representation) denir. Kutupsal gösterimdeki $\cos \theta + i \sin \theta$ karmaşık sayısına z 'nin kutupsal kısmı denir, θ niceliğine ise z 'nin **argümanı** (İng. argument) denir, $\theta = \arg z$ şeklinde gösterilir. Burada birkaç karmaşık sayının kutupsal gösterimlerini örnek olarak vermekte fayda vardır:

Örnek 5.

En basit karmaşık sayı $z = 1$ ile başlayalım:

$$z = 1 = 1(\cos(0) + i \sin(0))$$

olduğundan 1'in kutupsal gösterimi

$$1 = \cos(0) + i \sin(0)$$

şeklindedir. Sonraki doğal örneğimiz $z = i$ imajiner sayısıdır:

$$z = i = 1(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}))$$

olduğundan i 'in kutupsal gösterimi

$$i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})$$

şeklindedir. Bir başka örnek de $z = 1 + i$ sayısıdır. Onun da kutupsal gösterimi

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$$

şeklindedir.

Bir z karmaşık sayısının kutupsal kısmı olan $\cos \theta + i \sin \theta$ karmaşık sayısını bir sonraki bölümde daha ayrıntılı inceleyeceğiz. Bu $z = \cos \theta + i \sin \theta$ karmaşık sayısının mutlak değerinin 1 olduğu açıktır. Kutupsal koordinatları kullanarak tersini de söyleyebiliriz: Mutlak değeri 1 olan her z karmaşık sayısı $\cos \theta + i \sin \theta$ şeklinde yazılabilir.

1.4. Euler Formülü

Bu kısımda $\cos \theta + i \sin \theta$ sayısını inceleyeceğiz. Trigonometrik fonksiyonlar $\cos \theta$ ve $\sin \theta$ 'yı Analiz derslerinden hatırlayalım: Her iki fonksiyon da sonsuz kere türevlenebilir ve her yerde mutlak yakınsayan Taylor serisine sahiptir. Taylor seri açılımları aşağıdaki gibidir.

$$\cos \theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin \theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Yukarıdaki Taylor serileri mutlak yakınsadığı için toplam sıralarını değiştirebiliriz. Serileri $\cos \theta + i \sin \theta$ ifadesine koyarsak

$$\cos \theta + i \sin \theta = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \right) + i \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

elde edilir. Terimleri θ 'nın kuvvetlerine göre yeniden sıralarsak

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \right) + i \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!}$$

elde edilir.

Üstel fonksiyon e^x 'i hatırlayalım: Üstel fonksiyonun da Taylor serisi mutlak yakınsaktır ve Taylor seri açılımı aşağıdaki gibidir:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

O halde yukarıdaki son üç denklemi birleştirirsek aşağıdaki **Euler¹ Formülünü** elde ederiz:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Euler Formülünü bir diferansiyel denklemin çözümü olarak elde etmek de mümkündür:

$$z(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

fonksiyonunun türevi

$$z'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta) = i(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = iz(\theta)$$

verir. Yani

$$z'(\theta) - iz(\theta) = 0$$

diferansiyel denklemi sağlanır. Bir 'c' sabiti için

$$z'(\theta) - cz(\theta) = 0$$

¹Leonard Euler(1707-1783):Matematiksel Analiz ve Mekanik sahalarına önemli ve derin katkıları ile bilinen büyük İsviçreli matematikçi

diferansiyel denklemini çözerken eşitliğin her iki tarafını ' $e^{-c\theta}$ ' ile çarpıp denklemi

$$e^{-c\theta}(z'(\theta) - cz(\theta)) = (e^{-c\theta}z(\theta))' = 0$$

haline getirdiğimiz gibi burada da $c = i$ alıp

$$e^{-i\theta}(z'(\theta) - iz(\theta)) = (e^{-i\theta}z(\theta))' = 0$$

elde ederiz. Bu durumda $e^{-i\theta}z(\theta)$ fonksiyonunun türevi 0 olduğundan sabit fonksiyon olmalıdır ki bu da

$$e^{-i\theta}z(\theta) = C \Rightarrow z(\theta) = Ce^{i\theta}$$

verir. Buradaki C sabiti $\theta = 0$ değeri konularak bulunabilir:

$$z(0) = \cos(0) + i \sin(0) = 1 = Ce^{i0} = C$$

Yani $C = 1$ olmalıdır. Buradan da

$$z(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$$

elde edilir.

Euler Formülünde $\theta = 2\pi$ alınır

$$e^{2\pi i} = 1$$

elde edilir. Bu denklemden

$$e^0 = e^{2\pi i - 2\pi i} = e^{2\pi i} e^{-2\pi i} = 1 = e^{-2\pi i}$$

elde edilir. Son iki denklemi öteleysek, yani defalarca kendi kendine uygularsak

$$e^{2\pi ni} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

elde ederiz. Kutupsal gösterimdeki $\cos \theta + i \sin \theta$ yerine Euler Formülünden $e^{i\theta}$ konulursa

$$z = |z| e^{i\theta}$$

elde ederiz. Yukarıdaki (5) no'lu denklemden dolayı $\arg z = \theta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ alınabilir, yani argüman çok değerli bir nicelik olur ki bu da onun iyi tanımlı olmasını engeller. Bu tuhaf durum genelde argüman için uzunluğu 2π olan bir aralık belirlemek yoluyla düzeltilir. Genelde $-\pi < \arg z \leq \pi$ olarak belirlenen argümana **Asli Argüman** (İng. principal argument) denir ve $\theta = \text{Arg}(z)$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 6.

$z = i$ karmaşık sayısının mutlak değeri $|i| = 1$ ve asli argümanı $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ dir. Aynı şekilde $z = -i$ karmaşık sayısının da mutlak değeri $|-i| = 1$ ve asli argümanı $\text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ dir.

İki karmaşık sayı $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 'nin argümanları eşittir ancak ve ancak bir $n \in \mathbb{Z}$ için $\arg z_1 - \arg z_2 = 2\pi n$ dir. İki karmaşık sayı $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alalım:

$$z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}, \quad z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$$

olduğundan

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = |z_1 z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

olur. O hâlde

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

olur. Yani iki karmaşık sayıyı çarpmak geometrik olarak mutlak değerlerini çarpıp, argümanlarını toplamak demektir. Dikkat ediniz ki "arg" fonksiyonu da tıpkı $\mathbb{R}$ 'deki logaritma fonksiyonu gibi çarpımları toplamalara dönüştürür. Aynı şekilde iki karmaşık sayı z_1 ve z_2 'nin ($z_2 \neq 0$ olmak üzere) oranlarının argümanı argümanlarının farkıdır:

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$$

sağlanır. Euler formülünün bir sonucu da “De Moivre”(dö muavr) formülü olarak bilinen aşağıdaki formüldür:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Karmaşık Düzlemde Geometri

2.1. Çapraz Oran

Aynı doğru üzerinde bulunmayan üç noktadan bir çember geçtiğini biliyoruz. Bu durumda verilen ve aynı doğru üzerinde olmayan z_1, z_2 ve $z_3 \in \mathbb{C}$ noktalarını alalım. Burada z_1, z_2 ve $z_3 \in \mathbb{C}$ noktalarının aynı doğru üzerinde bulunmaması koşulunun $z_3 - z_1$ 'in $z_2 - z_1$ 'in gerçel katı olmaması şartına yani $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \notin \mathbb{R}$ şartına denk olduğunu görmek okur için zor olmamalıdır. Bu şart ise

$$\overline{\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)} \neq \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$\Rightarrow$

$$A := (z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) \neq 0$$

olmasına denktir. Bu z_1, z_2 ve $z_3 \in \mathbb{C}$ noktalarından geçen çember üzerinde bir $z \in \mathbb{C}$ noktası alalım. Çember geometrisinden bildiğimiz üzere zz_2 doğrusu ile z_1z_2 doğrusu arasındaki açı zz_3 doğrusu ile z_1z_3 arasındaki açıya eşit olmalıdır. Burada zz_2 doğrusu ile z_1z_2 doğrusu arasındaki açı

$$\text{Arg}\left(\frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}\right)$$

dir. Aynı şekilde zz_3 doğrusu ile z_1z_3 doğrusu arasındaki açı

$$\text{Arg}\left(\frac{z_3 - z}{z_3 - z_1}\right)$$

dir. O hâlde bu iki sayının asli argümanlarının eşit olması için oranlarının gerçel olması gerekir, yani

$$\left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}\right) : \left(\frac{z - z_3}{z_1 - z_3}\right) \in \mathbb{R}$$

olmalıdır. Yani z, z_1, z_2 ve $z_3 \in \mathbb{C}$ aynı çember üzerindedir ancak ve ancak

$$O(z, z_1, z_2, z_3) := \left(\frac{z - z_2}{z - z_3}\right) : \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right) \in \mathbb{R}$$

sağlanır. Burada

$$O(z_0, z_1, z_2, z_3) := \left(\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}\right) : \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right)$$

oranına z_0, z_1, z_2 ve $z_3 \in \mathbb{C}$ 'nin **çapraz oranı** (İng. “cross ratio”) denir. Bu durumda z, z_1, z_2 ve $z_3 \in \mathbb{C}$ aynı çember üzerindedir ancak ve ancak $O(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$O(z, z_1, z_2, z_3) = \overline{O(z, z_1, z_2, z_3)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{z - z_2}{z - z_3}\right) : \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right) = \overline{\left(\frac{z - z_2}{z - z_3}\right) : \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}\right)\left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}\right) = \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}\right)\left(\frac{z - z_3}{z_1 - z_3}\right)$$

olur.

2.2. Batlamyus Teoremi

Verilen herhangi $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ karmaşık sayıları için

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) &= \cancel{z_1z_3} - z_1z_4 - z_2z_3 + \cancel{z_2z_4} + z_3z_4 - \cancel{z_1z_3} - \cancel{z_2z_4} + z_2z_1 \\ &= z_1z_2 - z_1z_4 + z_3z_4 - z_2z_3 = z_1(z_2 - z_4) - z_3(z_2 - z_4) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4) \end{aligned}$$

özdeşliğinin geçerli olduğunu görmek zor değildir.

Bu

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4)$$

özdeşliğini üçgen eşitsizliği ile birleştirirsek her $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ için sağlanan

$$|z_1 - z_2| |z_3 - z_4| + |z_3 - z_2| |z_4 - z_1| \geq |z_1 - z_3| |z_2 - z_4|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bunun geometrik anlamı $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ karmaşık sayılarını sırasıyla $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4) \in \mathbb{R}^2$ noktaları ile özdeşleştirirsek

$$|AB| |CD| + |BC| |AD| \geq |AC| |BD|$$

şeklinde elde edilen “**Batlamyus² eşitsizliği**” dir. Bu eşitsizliğin eşitlik hâli, A, B, C ve D noktaları aynı çember üzerinde ise sağlanır ki buna da “**Batlamyus Teoremi**” denir:

Teorem 2. (Batlamyus Teoremi)

Birbirlerinden farklı $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ karmaşık sayıları verilsin öyle ki $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ sayıları aynı doğru üzerinde bulunmasın. O hâlde $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ karmaşık sayıları aynı çember üzerindedir ancak ve ancak

$$|z_1 - z_2| |z_3 - z_4| + |z_3 - z_2| |z_4 - z_1| = |z_1 - z_3| |z_2 - z_4|$$

sağlanır.

Kanıt. Yukarıdaki

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4)$$

özdeşliği ile başlayalım. Bu özdeşlikte her iki tarafı $(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$ ile bölersek

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)} + 1 = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

elde edilir. Bu denklem ise

$$-O(z_1, z_3, z_2, z_4) + 1 = O(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

denkleminde denktir ki burada

$$O(z_1, z_2, z_3, z_4) := \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right) : \left(\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \right)$$

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ karmaşık sayılarının çarpıraz oranını göstermektedir. Bu durumda z_2, z_3, z_4 aynı doğru üzerinde olmadığından, $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ aynı çember üzerindedir ancak ve ancak $O(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ ve $O(z_1, z_3, z_2, z_4) \in \mathbb{R}$. Burada $\text{Arg}(O(z_1, z_2, z_3, z_4)) = 0$ olduğundan $O(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$ yani pozitif bir gerçel sayıdır. O hâlde $\text{Arg}(O(z_1, z_3, z_2, z_4)) = \pi$ olur ki bu da $O(z_1, z_3, z_2, z_4) < 0$ ve $-O(z_1, z_3, z_2, z_4) > 0$ olması demektir. Yani eğer z_1, z_2, z_3 ve z_4 aynı çember üzerinde iseler

$$|-O(z_1, z_3, z_2, z_4) + 1| = |-O(z_1, z_3, z_2, z_4)| + 1 = |O(z_1, z_2, z_3, z_4)|$$

sağlanır ki bu da

$$|z_1 - z_2| |z_3 - z_4| + |z_3 - z_2| |z_4 - z_1| = |z_1 - z_3| |z_2 - z_4|$$

olmasına denktir. Tersine olarak eğer

$$|z_1 - z_2| |z_3 - z_4| + |z_3 - z_2| |z_4 - z_1| = |z_1 - z_3| |z_2 - z_4|$$

sağlanırsa

$$|-O(z_1, z_3, z_2, z_4) + 1| = |-O(z_1, z_3, z_2, z_4)| + 1 = |O(z_1, z_2, z_3, z_4)|$$

gerçeklenir ki buradan da üçgen eşitsizliğinin tersi kullanılarak (yani eğer $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ise $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^+$

²Batlamyus ya da Ptolemy(MS100-170): Küresel geometrinin temellerini ortaya koyduğu “Almagest” adlı eseriyle ünlü İskenderiyeli matematikçi

olduğundan) $-O(z_1, z_3, z_2, z_4) \in \mathbb{R}^+$ elde edilir. Bu ise z_1, z_2, z_3 ve z_4 noktalarının aynı çember üzerinde olması demektir. Yani $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ aynı çember üzerindedir ancak ve ancak

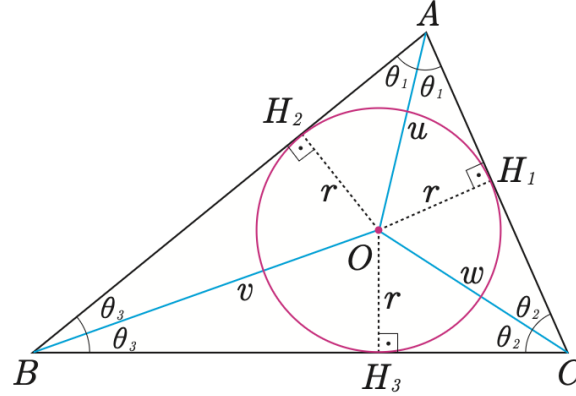
$$|-O(z_1, z_3, z_2, z_4)| + 1 = |O(z_1, z_2, z_3, z_4)|$$

sağlanır ve bu da ancak ve ancak

$$|z_1 - z_2| |z_3 - z_4| + |z_3 - z_2| |z_4 - z_1| = |z_1 - z_3| |z_2 - z_4|$$

eşitliği sağlanırsa gerçekleşir. □

2.3. Heron Formülü



Şekildeki ABC üçgenine bakalım. Heron³ formülü ABC üçgeninin alanını kenar uzunlukları cinsinden aşağıdaki gibi verir:

$$A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ki burada $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ ve $s = \frac{a+b+c}{2}$ dir.

İç yarıçap r ve yarıçevre s cinsinden ABC üçgeninin alanını veren daha kolay bir formül aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A(ABC) = A(BOC) + A(AOC) + A(AOB) = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = rs$$

Bu kısımda karmaşık sayıları kullanarak, dahiyane bir fikir vasıtasıyla r 'yi a, b, c ve s cinsinden bulacağız:

Karmaşık sayılar düzlemimizi merkezi A noktasında ve pozitif gerçel eksenini AC doğrusu olacak şekilde yerleştirdiğimizi tahayyül edelim: O hâlde $\overrightarrow{AO}$ vektörü bir u karmaşık sayısı olarak görülüp,

$$\overrightarrow{AO} = u = |AH_1| + ir = |u| e^{i\theta_1}$$

şeklindedir. Aynı şekilde

$$\overrightarrow{BO} = v = |BH_2| + ir = |v| e^{i\theta_2}$$

ve

$$\overrightarrow{CO} = w = |CH_3| + ir = |w| e^{i\theta_3}$$

elde edilir.

Şimdi bu u, v ve w karmaşık sayılarını çarptığımızda, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2}$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} uvw &= (|AH_1| + ir)(|BH_2| + ir)(|CH_3| + ir) = |u| |v| |w| e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} \\ &= |u| |v| |w| e^{i\frac{\pi}{2}} = i |u| |v| |w| \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki denklemlerden

$$|AH_1| + |CH_3| = b$$

³Heron(MS10-70): Geometri ve Mekaniğe katkılarıyla bilinen İskenderiyeli matematikçi

$$|BH_2| + |CH_3| = a$$

$$|AH_1| + |BH_2| = c$$

$|AH_1| + |BH_2| + |CH_3| = s$ ve $|AH_1| = s - a$, $|BH_2| = s - b$ ve $|CH_3| = s - c$ elde edilir.

O hâlde

$$\Re(uvw) = \Re(((s-a) + ir)((s-b) + ir)((s-c) + ir)) = 0$$

dır. Bu üç karmaşık sayı u, v ve w 'nin çarpımına bakalım:

$$\begin{aligned} & ((s-a) + ir)((s-b) + ir)((s-c) + ir) \\ &= [((s-a)(s-b) - r^2) + i(r(s-a) + r(s-b))][(s-c) + ir] \\ &= [((s-a)(s-b) - r^2)(s-c) - r(r(s-b) + r(s-a))] \\ &\quad + i[(r(s-b) + r(s-a))(s-c) + r((s-a)(s-b) - r^2)] \end{aligned}$$

O hâlde buradan

$$\Re(uvw) = (s-a)(s-b)(s-c) - r^2(s-a+s-b+s-c) = 0$$

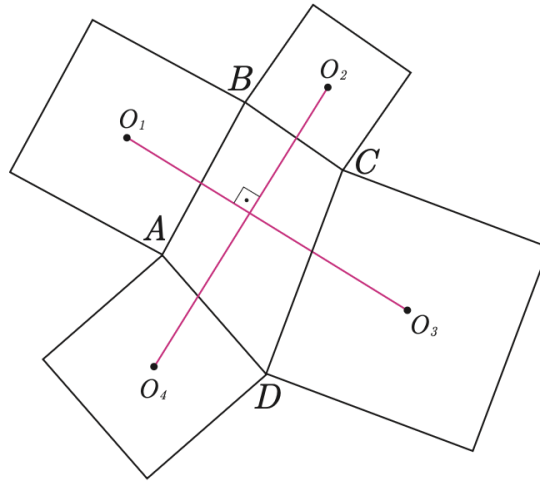
elde edilir. Burada $s-a+s-b+s-c = 3s-(a+b+c) = 3s-2s = s$ olduğundan

$$(s-a)(s-b)(s-c) - r^2s = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

elde edilir. Bu da Heron formülünü verir:

$$A(ABC) = rs = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

2.4. Van Aubel Teoremi



Belçikalı matematikçi Henri Van Aubel⁴ 1878 yılında, düzlemde verilen herhangi bir dörtgenin kenarları üzerine kurulan karelerin merkezlerini karşılıklı olarak birleştiren doğru parçalarının eşit uzunlukta olduğunu ve bu doğruların birbirlerine dik olduklarını ispatladı. Bu kısımda bu teoremin karmaşık sayılarla yapılan bir ispatını göreceğiz: Yukarıdaki şekildeki $ABCD$ dörtgenini karmaşık düzlemimize A noktası orjin 0 noktasına gelecek şekilde yerleştirelim. Burada B noktası $2a \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısı, C noktasının B noktasından farkı $2b \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısı, D noktasının C noktasından farkı $2c \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısı ve A noktasının D noktasından farkı $2d \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısı olsun. Bu durumda

$$2a + 2b + 2c + 2d = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0$$

sağlanır.

⁴Henricus Hubertus (Henri) Van Aubel (1830-1906): Sentetik Düzlem Geometrisiyle ilgili ilginç teoremleri ile bilinen Belçikalı matematikçi

Bu teoremi ispatlarken düzlemde iki doğru parçasının aynı uzunlukta ve birbirine dik olmasının karmaşık sayılar cinsinden karakterizasyonunu kullanıyoruz: Bir AB doğru parçası, eğer A noktasının düzlemde karşılık geldiği karmaşık sayı z_1 ve B noktasının düzlemde karşılık geldiği karmaşık sayı z_2 ise $AB = z_2 - z_1$ olur. Ayrıca $CD = z_4 - z_3$ olsun. O halde eğer $z_2 - z_1 = i(z_4 - z_3)$ ise $z_2 - z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ve $z_4 - z_3 = r_2 e^{i\theta_2}$ için

$$z_2 - z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = e^{i\frac{\pi}{2}} r_2 e^{i\theta_2} = r_2 e^{i(\theta_2 + \frac{\pi}{2})}$$

olduğundan $r_1 = r_2$ ve $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta_2$ olmalıdır. Yani eğer $z_2 - z_1 = i(z_4 - z_3)$ ise AB doğru parçası CD doğru parçasına dik ve bu iki doğru parçası eşit uzunlukta olmalıdırlar. Benzer şekilde eğer $z_4 - z_3 = i(z_2 - z_1)$ ise de aynı durum gerçekleşir yani AB ve CD aynı uzunlukta ve birbirlerine diktirler. Terside doğrudur yani AB doğru parçasının uzunluğu CD doğru parçasınıninkine eşit ve bu iki doğru parçası birbirlerine dik iseler $z_2 - z_1 = i(z_4 - z_3)$ veya $z_4 - z_3 = i(z_2 - z_1)$ olmalıdır. Burada i ile çarpma bir karmaşık sayıyı kendisine dik olacak şekilde saat yönünün tersi yönde döndürür.

Şimdi yukarıdaki şekle geri dönelim: A noktası 0 yani orijin noktasında olduğundan AB kenarı üzerindeki karenin merkezi O_1 noktası $a + ia \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısına karşılık gelir. Aynı şekilde BC kenarı üzerindeki karenin merkezi O_2 noktası $2a + b + ib \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısına, CD kenarı üzerindeki karenin merkezi O_3 noktası $2a + 2b + c + ic \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısına ve AD kenarı üzerindeki karenin merkezi O_4 noktası ise $-d + id \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısına karşılık gelir. O hâlde O_1O_3 doğru parçası

$$O_1O_3 = 2a + 2b + c + ic - (a + ia) = a + 2b + c + i(c - a) \in \mathbb{C}$$

ve O_4O_2 doğru parçası

$$O_4O_2 = 2a + b + ib - (-d + id) = 2a + b + d + i(b - d) \in \mathbb{C}$$

karmaşık sayılarına karşılık gelirler. Burada O_1O_3 doğru parçasını i ile çarparsak

$$iO_1O_3 = i(a + 2b + c + i(c - a)) = (a - c) + i(a + 2b + c) \in \mathbb{C}$$

elde ederiz. Şimdi $a + b + c + d = 0$ olduğunu hatırlayalım:

$$a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b + d = -c$$

ve buradan da

$$2a + b + d = a + (a + b + d) = a - c$$

elde edilir. Aynı şekilde $a + b + c = -d$ ve

$$a + 2b + c = b + (a + b + c) = b - d$$

elde edilir. Buradan da

$$iO_1O_3 = (a - c) + i(a + 2b + c) = 2a + b + d + i(b - d) = O_4O_2$$

sonucu çıkar ki bu da O_1O_3 doğrusunun O_2O_4 doğrusuna dik olduğu ve $|O_1O_3| = |O_2O_4|$ olduğunu verir. Böylece Van Aubel Teoremini ispatlamış olduk.

■ Kaynaklar

- [1] Ahlfors, L. V. Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable, Prentice Hall 1953.
- [2] Deaux, R. Introduction a la geometrie des nombres complexes, F. Ungar Pub. Co. 1956.
- [3] Needham, T. Visual Complex Analysis, Oxford University Press 1997.
- [4] Schwerdtfeger, H. Geometry of Complex Numbers: Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry, Dover Pub. 1980.
- [5] Yaglom, I. M. Complex Numbers in Geometry, Academic Press 1968.