

Paranoyak Bir Matematikçi: Kurt Gödel

ALİ BERK KOYUNCU

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü, 3. Sınıf Öğrencisi

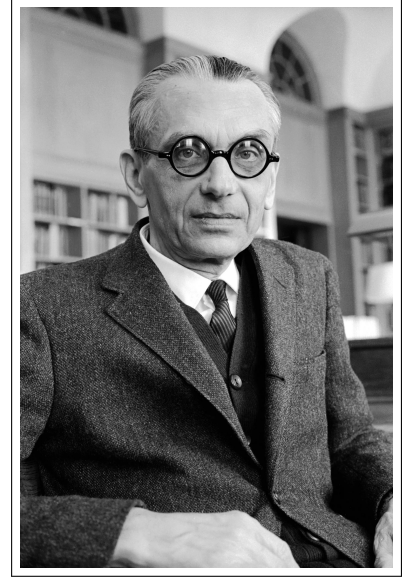
✉ aliberkkync@gmail.com



Bu yazıda size Einstein'ın yakın bir dostundan bahsetmek istiyorum. Tabii ki kendisinin tek özelliği Einstein'ın dostu olması değil. Matematik tarihinin altın isimlerinden biri olarak kabul edilen Kurt Gödel, Aristo'dan bu yana en büyük mantıkçı olarak anılır. Yaptığı çalışmalarla 20. yüzyıl matematiğinin seyrini değiştiren Gödel'in teoremleri matematikçiler kadar matematikçi olmayanların da ilgisini çekmiştir. 28 Nisan 1906 yılında bugün Çek Cumhuriyeti'nin olduğu Avusturya-Macaristan bölgesindeki Brünn kentinde dünyaya geldi. Tekstil işiyle uğraşan Rudolf Gödel ve Marianne Gödel çiftinin 2 oğlundan küçük olanıydı. Gençliğinde etrafındakileri sonu gelmez sorularla bunalttığı için kendisine 'Der Herr Warum' yani 'Bay Neden' lakabı takıldı.

1. Eğitim Hayatı

18 yaşında abisinin arkasından Viyana Üniversitesi'nde eğitim görmeye başladı. Burada Furtwängler, Hahn, Wirtinger, Menger, Helly gibi öğretmenlerden dersler aldı. Üniversitenin başlarında hangi alanla ilgileceği konusunda oldukça kararsız olan Kurt, Furtwängler'in derslerinden çok etkilenmiş ve matematiğe yönelme kararı almıştır. 1929 yılında, henüz 23 yaşındayken Hans Hahn'ın danışmanlığında doktora derecesini aldı. Birinci derece yüklem mantığının eksiksiz (tam) olduğunu gösterdiği doktora tezi, daha sonra Gödel'in Tamlık Teoremi olarak anılacaktır.



Kurt Gödel (1906-1978)

Doktorasını tamamladığı yıl babasını kaybeden Gödel, Viyana Üniversitesi'nde Öğretim Üyesi olarak çalışmaya devam etti, taa ki Avrupa'da dünya savaşının çanları çalmaya başlayana kadar. O da diğer çoğu bilim insanı gibi Avrupa'dan Amerika'ya kaçtı. 1940 yılında Princeton İleri Araştırma Enstitüsü'nde çalışmaya başladı. Princeton'da ileride sıkı bir dostluk kuracağı, hatta bu dostunun ölümünden sonra onun adını taşıyan bir ödülün ilkinde layık görüleceği Albert Einstein ile tanıştı. Gödel, Einstein'ın genel görelilik kuramı üzerine de önemli çalışmalar yapmıştır. Einstein'ın kütleçekim alan denklemlerine, ekseni etrafında dönen bir evreni tanımlayan bir çözüm getirir. Bu çözümde evrenin dönüşü, ışığı da birlikte sürükler; dolayısıyla bir maddesel cismin, ışık hızını aşmaksızın uzay-zaman içinde kapalı bir zaman-benzeri eğri (ing. timelike curve) izlemesi, yani zamanda geriye gitmesi mümkün hale gelir. Bu model, görelilik kuramının belirli koşullarda zamanda yolculuğa izin verebileceğini göstermesi bakımından çarpıcıdır. Gödel'in bu çözümü, "Gödel evreni" olarak bilinir ve dönen, homojen ama gözlemlenebilir evrenimizle tutarsız bir yapıya sahiptir. Nitekim bu model, gökbilimcilerin gözlemlendiği kütleçekimsel kıvrıma kayma verileriyle çeliştiği için fiziksel evrenin gerçek yapısı olarak kabul edilmez. Yine de bu çözüm, genel görelilik kuramının zaman kavramına dair sınırlarını gözler önüne serdiği için teorik fizikte büyük yankı uyandırmıştır. Einstein ise, kuramının böyle sıra dışı çözümlere izin vermesinden rahatsızlık duymuştur.

Zaman zaman ilgi alanı felsefeye kayan Gödel, Leibniz ve Kant'ın çalışmalarını okuduğunda bu kişilere hayran olur. Kendisinin Tanrı varlığına dair ispatı da vardır¹. Hatta ünlü mantıkçı Solovay, 1985'te yapılan

¹Gödel'in ontolojik ispatı olarak bilinir.

aritmetik ile ifade etmeyi başarır. Dolayısıyla matematiğe indirgenen bu önermenin artık bir matematiksel önerme olduğunu söyleyebiliriz. O halde bu önerme ya doğru ya da yanlış olmalıdır. İlk olarak önermenin yanlış olduğunu düşünelim. Bu durumda verilen önerme kanıtlanabilir olmalıdır. Biliyoruz ki matematikte bir önerme kanıtlanabiliyorsa doğrudur. Ancak önermenin yanlış olduğunu kabul etmiştik. Dolayısıyla bir çelişki elde ettik. Çelişkisiz bir sistemde olduğumuza göre, önerme doğru olmalıdır. Önermenin ne dediğine tekrar bakalım: "Bu önerme kanıtlanamaz". O halde elimizde doğru bir önerme var ve bu önerme kanıtlanamaz!³

Şimdi ikinci eksiklik teoremine matematiksel olarak bakalım: Doğal sayıları, toplamayı ve çarpmayı ifade edecek güçte tutarlı bir sistemin tutarlı olduğu gerçeği sistemin içinde kanıtlanamaz. Bu teorem aslında birinci eksiklik teoreminden elde edilir. Tutarlı bir S sisteminin tutarlılığının kendi içinde kanıtlanamayacağını göstereceğiz. G önermesi Birinci Eksiklik Teoremi'nde bahsedilen kanıtlanamaz bir önerme olsun. S sisteminin tutarlılığının kendi içinde kanıtlanabildiğini varsayalım. Yani bu, " S sistemi tutarlıdır" önermesini kanıtlamak demektir. Şimdi, "Eğer S sistemi tutarlıysa, bu durumda G önermesi kanıtlanamaz" ile verilen önermeyi ele alalım. Bu önerme sistem içinde biçimselleştirilebilir. S sisteminin tutarlılığının kendi içinde kanıtlanabildiğini varsaydığımızdan dolayı, bu önermeyle birlikte G 'nin kanıtlanamazlığı da sistem içinde kanıtlanmış olur. G önermesi kanıtlanamayacağını söylüyordu ve biz bu önermeyi sistem içinde kanıtlamış olduk. Bu durum Birinci Eksiklik Teoremi ile çelişir. Dolayısıyla varsayımımız yanlış olup, tutarlı bir sistem kendi tutarlılığını kanıtlayamaz, sonucuna varırız.

3. Gödel Numaralandırması

Gödel numaralandırması, bir aksiyomlar sistemi hakkındaki ifadeleri sistem içindeki ifadelerle, yani sayılarla ilgili ifadelerle eşleyerek sistemin *bir anlamda* kendisiyle konuşmasını sağlar. Bu süreçteki ilk adım, herhangi bir olası matematiksel ifadeyi veya bir dizi ifadeyi *Gödel numarası* adı verilen biricik sayıya eşlemektir.

Öncelikle, biçimsel sistemin dilindeki her bir ilkel sembole, sabite, fonksiyon sembollerine ve değişken sembollerine birer doğal sayı atanır. Bu sayıya o sembolün *sembol numarası* denir. Hangi sembole hangi sayının atanacağı ve hangi sırayla yapılacağı önemli değildir; bu atama keyfidir. Ancak bir kez yapıldıktan sonra sabit kalmalıdır. Örneğin aritmetiğin standart dili göz önüne alınırsa, bir şeyin var olduğu ifadesi $\exists$ sembolü ile, toplama ise $+$ ile ifade edilir. Daha da önemlisi, "ardılı" ifade eden S sembolü, sayıları belirtmenin bir yolunu verir; örneğin $SS0$, 2'yi (0'ın ardılının ardılı) ifade eder. Örneğin Nagel ve Newman, tam olarak 12 tane sabit sembol olduğunu kabul etmiş ve bu sembollere aşağıdaki doğal sayıları atamıştır.

Sabit Sembol	Sembol Numarası	Anlamı
$\neg$	1	değil
$\vee$	2	veya
$\rightarrow$	3	eğer... ise
$\exists$	4	... vardır
$=$	5	eşittir
0	6	sıfır
S	7	ardıl (bir sonraki sayı)
(	8	sol parantez
)	9	sağ parantez
,	10	noktalama işareti (virgül)
$+$	11	toplama
$\times$	12	çarpma

Tablo 1. İlkel sabit sembollerin Gödel numaraları

Bu on iki sembolden sonra, x , y ve z gibi sayısal değişkenleri temsil eden harfler, 12'den büyük asal sayılara (yani 13, 17, 19, ...) eşlenir. Bu biçimsel dilde yazılabilecek sayılabilir sonsuz çoklukta cümle var.

³Bazıları şu soruyu sorabilir: Şimdi biz önermenin doğru olduğunu kanıtlamış olmadık mı? Cevap: Hayır. Teoremin ifadesine dönecek olursak burada anahtar ifade "sistem içinde kanıtlanamayan" ifadesidir.

Bu cümlelerin hepsi kurala uygun olmayabilir, ancak bunu kontrol edebileceğimiz bir algoritma mevcuttur. Yukarıdaki atamaları yaptıktan sonra bu sembollerin ve değişkenlerin herhangi bir kombinasyonu — yani oluşturulabilen herhangi bir aritmetik formül veya formül dizisi — kendi Gödel sayısını alır. Örneğin, $0 = 0$ formülünü ele alalım. Bu formülün üç sembolü, Gödel sayıları sırasıyla 6, 5 ve 6'ya karşılık gelir. Gödel'in bu üç sayı dizisini, başka hiçbir simge dizisinin üretemeyeceği tek ve benzersiz bir sayıya dönüştürmesi gerekir. Bunu yapmak için ilk üç asal sayıyı (2, 3 ve 5) alır; aynı konumdaki sembole karşılık gelen sayıyı bu asal sayının kuvvetine yazar ve bunları birbiriyle çarpar:

$$2^6 \times 3^5 \times 5^6 = 243,000,000$$

Bu eşleme oldukça işe yarar, çünkü *Aritmetiğin Temel Teoremi* sayesinde her önerme tek bir sayıyla ve her sayı da tek bir önerme ile eşleşir. Gödel sayıları tam sayılardır ve tam sayılar asal sayıların etkisine yalnızca tek bir şekilde açıktır. Yani 243.000.000 sayısının asal çarpanlara ayrılması yalnızca şu şekilde mümkündür:

$$2^6 \times 3^5 \times 5^6$$

Dolayısıyla, bu Gödel sayısına karşılık gelen formül yalnızca $0 = 0$ olabilir.

Gödel daha sonra bir adım daha ileri giderek her formül dizisine de benzersiz bir Gödel numarası verdi. Bu durumda, daha önce olduğu gibi asal sayılar listesiyle başladı. Daha sonra her bir asalı dizideki aynı konumdaki formülün Gödel sayısına yükseltti. Örneğin $0 = 0$ önce geliyorsa, bu dizinin sayısı şu şekilde olur:

$$2^{243,000,000}$$

Sonuç olarak Gödel, bu yöntemi kullanarak her mantıksal ifadeyi bir doğal sayıya çevirmeyi başardı; buna Gödel numaralandırması denir. Bu sayede formüller aritmetiğin diliyle temsil edilebildi. Bu tekniklerle, kendi anlamına gönderme yapan, yani "bu önerme kanıtlanamaz" diyen en az bir önerme kurmayı başardı. Böyle bir önerme, sistem tutarlıysa ne ispatlanabilir ne de çürütülebilir. Bir önceki bölümde de ifade ettiğimiz gibi bu, Gödel'in birinci eksiklik teoreminin özüdür: Tutarlı ve yeterince güçlü her biçimsel sistemde, doğruluğu sistem içinde kanıtlanamayan önermeler vardır.

4. Kapanış

Eksiklik teoremlerinin sonuçları çok yıkıcıydı. Mantıksal-pozitivist olan Viyana Çevresi, Hilbert'in biçimcilik projesi başta olmak üzere matematiğin temelleri sorununu çözmeye çalışan herkesi yerle yeksan etmişti. Peki bu teoremler gerçekten elimizi kolumuzu bağlıyor mu? Matematik tutarsız olabilir mi? O halde bunca şeyi üstüne inşa ettiğimiz, medeniyetimizin direği, matematik eksik olabilir mi? Teoremler insanın aklında bolca soruya yol açıyor ve ne yazık ki bu soruların birçoğu zihnimizce yanlış cevaplanıyor. Ben de ilk başta oldukça yanlış cevaplamıştım ve derinden üzen bir yola sokmuştu. Fakat bir gün Ahmet Çevik'in 'Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık' isimli kitabında bir sonraki alt başlıkta yazdığım şeyleri okuyuncaya kadar.

■ Eksiklik teoremlerinden ne anlamamalıyız?

- Hiçbir biçimsel sistem tam ve tutarlı olamaz.

Gödel'in teoremi her biçimsel sistem için geçerli değildir. Tam ve tutarlı bir sisteme örnek: burulmasız bölünebilen Abel grupları.

- Matematik tutarsızdır veya tutarlı olduğu bilinemez.

Gödel'in teoremleri matematiğin tutarsız olduğunu söylemez. Sadece yeterince güçlü sistemlerin kendi tutarlılığını sistemin aksiyomlarından kanıtlayamayacağını söyler.

- Gödel'in teoremi yanlıştır ve matematikçiler arasında kabul görmez.

Gödel'in özgün teoreminden bu yana, eksiklik olgusu kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve oldukça iyi anlaşılmıştır. Matematik camiası Gödel'in teoremlerini kabul etmiş ve değerini takdir etmiştir.

- Matematik biçimsel bir sistem haline getirilemez.

Burada olağan matematik-gerçek matematik ayrımı yapmak gerekir. Yapmış olduğumuz matematik biçimselleştirilebilir, ancak yapıyor olduğumuz matematik aktivitesi biçimselleştirilemez.

Matematik tarih boyunca birçok krizle karşı karşıya geldi. Büyük çoğunluğunu çözmüş olsak da, en önemli krizi hâlâ çözmek bir yana tam olarak anlamış bile bulunmuyoruz. Gödel'i kendini aç bırakıp, paranoyalarına teslim eden karanlık da bu olsa gerek. Hayatının son yıllarında çevresindeki herkesin onu zehirleyeceğine inanan Gödel, sadece eşi tarafından hazırlanmış yemekleri yemeyi kabul ediyordu. Eşi hastalanıp hastaneye kaldırıldığında ise tamamen yemek yemeyi reddetti ve 1978'de, yalnızca 29 kilo ağırlığındayken açlıktan hayatını kaybetti.

Cantor, Turing, John Nash ve Kurt Gödel – Tüm bu matematikçiler sıra dışı denilebilecek hayatlar sürdüler ve aynı sıra dışılığa son nefeslerini verdiler. Fakat onların açtığı o daracık yol sayesinde matematik dünyamıza ışık tutabiliyor. Bir süredir okuyup araştırdığım, anlamaya çalıştığım, Einstein'ın yakın dostu olan bu 'deli' matematikçilerden paranoyak matematikçimiz Kurt Gödel'i umarım anlatabilmişimdir. Tuhaf bir adamdı ama bu tuhaf adamın olağanüstü düşleri vardı. Bu düşler sayesinde içinde yaşadığımız düşü daha iyi anlayabiliyoruz ya da en azından anlamaya çalışıyoruz.



Einstein ve Gödel, New Jersey, Princeton'daki düzenli yürüyüşlerinden birinde.

■ Kaynaklar

- [1] Ali Nesin & Ali Törün, Matematikçi Portreleri (7. Baskı), Nesin Yayıncılık, 2023.
- [2] Ahmet Çevik, Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık, Nesin Yayıncılık, 2019.
- [3] Janna Levin, Tuhaf Bir Adamın Olağanüstü Düşleri, Çev. Nedim Çatlı, Nora Kitap, 2021.
- [4] Ernest Nagel & James R. Newman, Gödel Kanıtlaması, Çev. Bülent Gözkan, Alfa Yayıncılık, 2020.
- [5] Bekir S. Gür, Matematik Belası Üzerine, Nesin Yayıncılık, 2020.
- [6] https://nesinkoyleri.org/wp-content/uploads/2019/09/226_232_kurtgodel.pdf
- [7] Matthias Baaz, Kurt Godel and the Foundations of Mathematics: Horizons Of Truth, Cambridge, 2021.