

Nizami İki Karma Metodunun Matematiksel İzahı

TALHA TİN

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü, 3. Sınıf Öğrencisi

✉ talhatin@gmail.com



1. Grup Kavramı

Bu yazıda bir iskambil destesi üzerine tanımlanacak karma metotları üzerinde durulacak, bu sebeple de simetri gruplarından bahsetmemiz gerekecek. Bir deste üzerinde tanımlanabilecek bir karma metodunun simetri grupları ile ilişkisini ilk bakışta göremeyecek, matematiksel olgunluğu yüksek olmayan okuyucular endişelenmesin. Ancak tanımları verilecek olan bu kavramların bizim ne işimize yarayacağı yazının ilerleyen kısımlarında anlam kazanacaktır.

Soyut Cebir derslerini almış okuyucular grup kavramını ilk kez duymuyordur. Ancak grup kavramı ile ne kastediyoruz biraz bundan bahsedelim. Bir G kümesi alalım. Bu küme boştan farklı olsun. Bu küme üzerine bir ikili işlem tanımlayalım. İkili işlem ile kastımız tam olarak aşağıdaki gibi bir fonksiyondur:

$$\begin{aligned} *: G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto * (x, y) = x * y \end{aligned}$$

Yani G kümesinden aldığımız iki elemanı bir işleme tâbi tutuyoruz ve bu işlemin görüntüsü (başka bir deyişle sonucu) yine G kümesinde oluyor. Bir küme ve bir işlem ile bir grup yapısını inşa etmek için, bu yapının aşağıdaki özellikleri sağlamasını bekleriz.

1. $\forall a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ (Birleşme)
2. $\exists e \in G$ öyle ki $\forall a \in G$ için $e * a = a * e = a$ (Birim eleman)
3. $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ öyle ki $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (Ters eleman)

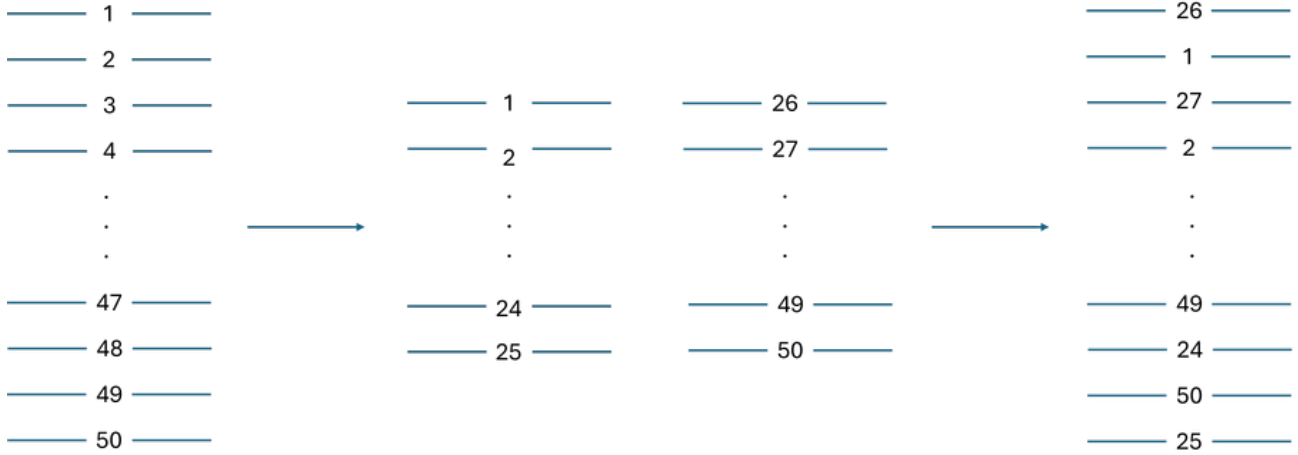
Oluşturduğumuz bu yapıyı ve sonuçlarını açıklamak ayrı bir yazının konusu. Biz simetri gruplarının gösteriminden faydalanacağımız için bu yapıyı yalnız bu açıdan ele almakla yetineceğiz. Ancak bir grubun ne olduğunu hiç duymamış okuyucular için de şu ana kadar bir sezi oluşturmayı umuyoruz.

Simetri grupları için çok formel bir tanım vermektense, kavramsal bir sezi hissettirmeye çalışacağız. Simetri kelimesinin günlük kullanımı ve etimolojisi üzerine düşündüğümüzde zaten mevzunun aşına olduğumuz simetrilerle ilgili olacağını kestirebiliriz. Yine de gruplar teorisinin mertebe kavramı ile simetri grubu elemanlarının dairesel temsilleri üzerinde ön bilgiye sahip olmak faydalı olacaktır.

2. Faro Karması

Faro ismi İspanya'da meşhur olan bir iskambil oyunundan gelir. Bu karma metodunun ilginç sonuçlar oluşturduğunu gören matematikçiler bu karma metodunu mükemmel karma olarak da isimlendirmiştir. Neden ilginç sonuçlar oluşturduğunu analiz etmeden önce karma metodunu tanımlayalım. $2n$ tane karta sahip bir deste alalım. Bu desteyi tam ortadan iki parçaya bölelim. Oluşan iki parçayı öylesine nizami karacağız ki, bir kart ilk parçadan bir kart ikinci parçadan gelecek. Bu durumda aslında bir değil iki karma metodu tanıttık; çünkü bir karmanın sonunda oluşacak destenin en altındaki kart, oluşturduğumuz parçaların herhangi birinden gelebilir. Biz *iç faro karması* olarak adlandırılan karma ile çalışacağız. Bu karma yönteminde, karma sonunda destenin en altında bulunan kart, ilk destenin üst yarısındaki parçasından

gelir. Bu karmayı her kartın konumunun değiştiği karma olarak da görebiliriz, çünkü dış faro karmasında ilk ve son kartın konumu hep aynı kalır. Her iki karma metodunun ilgi çekici sonuçları olsa da biz bu yazımız boyunca iç faro karması ile çalışacağız.



Şekil 1. 50 Kart İçin Faro Karması

Karma metodunu ve oluşturduğu grup yapısını (her ne demekse artık!) analiz etmek adına bir soru soralım: 50 kartlık bir desteye kaç kez faro karması uygularsak deste tekrar ilk konumuna ulaşır? Bu soruya cevap verebilmek adına destemizdeki kart sayısını küçülterek bir analiz yapalım. Sadece hesap yaparak çift sayıda karta sahip desteler için soruyu cevaplandırdığımızda; tablonun solunda destedeki kart sayısı, sağında ise ilk konuma dönmek için gereken faro karma sayısı olmak üzere şu tabloyu elde ederiz.

2	2
4	4
6	3
8	6
10	10
12	12
14	4
...	...
50	?

Cevabımıza ulaşmak adına bir fonksiyon tanımlayacağız. Bu fonksiyonun işlevi, bir faro karması sonucunda bir kartın kaçınıcı kart olduğunu bize söylemek olacak. Yani x 'inci kartın bu f fonksiyonu altındaki görüntüsü, yani $f(x)$ bir kez faro karmasına tabii tutulan destede x 'inci kartın kaçınıcı kart olduğu olacaktır. 50 kartlık bir deste için fonksiyonun tanım kümesindeki tüm elemanların (yani 1'den 50'ye kadar olan tüm sayıların) görüntülerine bakalım.

$1 \mapsto 2$	$26 \mapsto 1$
$2 \mapsto 4$	$27 \mapsto 3$
$3 \mapsto 6$	$28 \mapsto 5$
$\vdots$	$\vdots$
$24 \mapsto 48$	$49 \mapsto 47$
$25 \mapsto 50$	$50 \mapsto 49$

50 elemanlı bir kümeden 50 elemanlı bir kümeye, bize bu görüntüleri verecek bir fonksiyon tanımlamak istiyoruz. Bu kısımda yeterli olgunluğa sahip okuyucu simetri gruplarının neden işimize yarayacağını sezmış olacaktır.

İlk 25 kart için fonksiyon kuralını yazmak kolay, $f_{50}(x) = 2x$ fonksiyonu ilk 25 kart için işimizi görecektir. Ancak 26'ncı karttan 50'nci karta kadar fonksiyon kuralını yazmak bu kadar kolay değil. Yine de her bir kartın görüntüsünü analiz ettiğimizde destenin altındaki kısım için de $f_{50}(x) = 2(x - 26) + 1$

olduğunu görebiliriz. O halde bu fonksiyonu bir parçalı fonksiyon olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

$$f_{50}(x) = \begin{cases} 2x & ; x \leq 25 \\ 2x - 51 & ; x > 25 \end{cases}$$

Simetri gruplarının gösterimi sayesinde bu fonksiyon kuralı aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\begin{aligned} & (1\ 2\ 4\ 8\ 16\ 32\ 13\ 26)(3\ 6\ 12\ 24\ 48\ 45\ 39\ 27) \\ & (5\ 10\ 20\ 40\ 29\ 7\ 14\ 28)(11\ 22\ 44\ 37\ 23\ 46\ 41\ 31) \\ & (9\ 18\ 36\ 21\ 42\ 33\ 15\ 30)(17\ 34)(19\ 38\ 25\ 50\ 49\ 47\ 43\ 35) \end{aligned}$$

Burada, her parantezde bir çevrimsel atamalar dizisi tarif edilir; örneğin ilk parantez bize f_{50} fonksiyonunun

$$1 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 8 \mapsto 16 \mapsto 32 \mapsto 13 \mapsto 26 \mapsto 1$$

şeklinde atamalar yaptığını söyler. Takip eden diğer parantezlerle birlikte değerlendirildiğinde f_{50} fonksiyonunun nasıl çalıştığı tam olarak belirli olur.

Simetri Gruplarında Mertebe Hesaplama

Sorumuzu artık

“Bir deste, belirli bir karma yönteminin art arda uygulanması ile ne zaman ilk konumuna döner?”

şeklinde netleştirebiliriz. Dikkat edilirse f_{50} fonksiyonu, 7 döngünün bileşkesi tarafından oluşuyor. Tüm fonksiyonun mertebesini bulabilmek için, onu oluşturan döngülerin mertebelerini (yani ne zaman başlangıç konumuna döneceklerini) hesaplayalım. İlk olarak

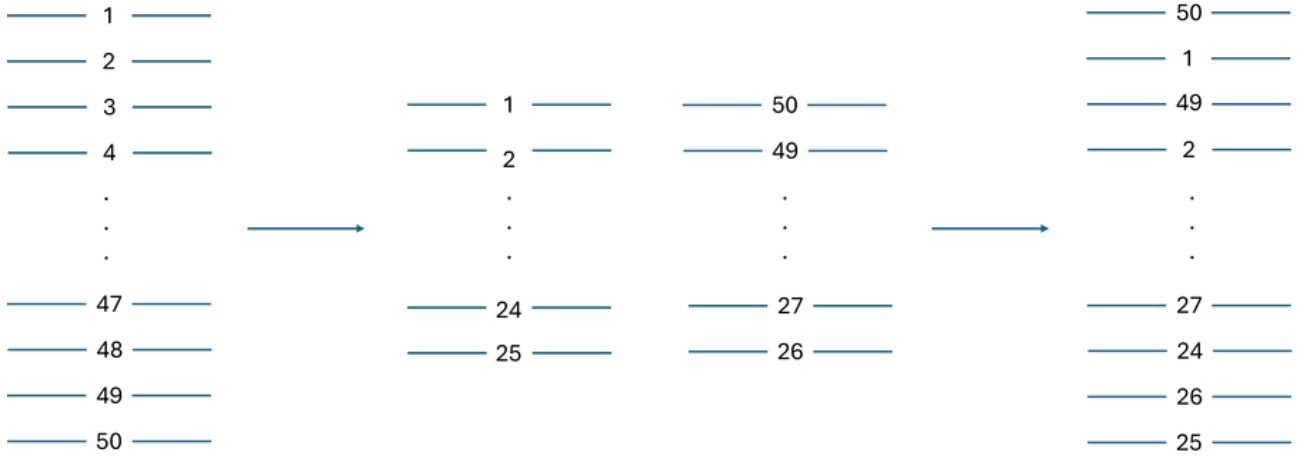
$$(1\ 2\ 4\ 8\ 16\ 32\ 13\ 26)$$

döngüsü ile başlayalım. 8 elemanı olan bu döngünün mertebesini hesaplarken, bir sekizgenin dönme simetrilerini incelemek bu döngünün ilk konumuna ne zaman ulaşacağını görmemizi sağlayacaktır. Bir sekizgeni sekiz kez döndürdüğümüzde ($\pi/4$ radyanlık dönmelerden bahsediyoruz) sekizgen tekrar ilk konumuna gelecektir. O halde bu döngünün mertebesi 8'dir. 8 elemanı olan diğer döngüler için de aynı hesap yapılacaktır. 2 elemanı olan döngü için bu hesabı yaptığımızda sonuç 2 çıkacaktır. Çünkü bir doğruyu iki kez π radyan döndürdüğümüzde ilk konumuna ulaşacaktır. Bir desteye faro karmasını bir kez uyguladığımızda bu döngülerin her birini birer kez uygulamış oluruz. O halde bir desteye iki kez faro karması uyguladığımızda 2 elemanı olan döngü ilk konumuna dönmüş olsa da (yani 17. ve 34. kartlar tekrar 17. ve 34. kartlar olur) diğer altı döngüden hiçbirisi ilk konumuna ulaşmış değildir. Ancak faro karmasını sekiz kez uyguladığımızda, mertebesi sekiz olan altı döngü başlangıç konumuna dönmüş olur. Bu sırada mertebesi iki olan döngü ise 4 kez ilk konumuna dönmüş olur. Daha sezgisel açıklanmaya çalışılsa da aslında f_{50} fonksiyonunun mertebesi, bu yedi döngünün mertebelerinin en küçük ortak katına eşittir.

Soruyu iskambil destelerinden aşına olduğumuz 52 kartlık desteler için sormamamızın sebebi, 52 kartlık destenin tek bir döngü vereceğidir. Yani destemiz 52 tane karta sahipse, ona 52 kez faro karması uygulamamız gerekecektir. Bizi daha ilginç bir sonuca ulaştırdığını düşündüğümüzden 50 kartlık bir deste için cevap aradık.

3. Tersyüz Karması

Çift sayıda karta sahip bir deste üzerine tanımlanabilecek yeni bir karma metodu tanıtalım. Bu karma metodunda, faro karmasında olduğu gibi deste tam ortadan ikiye bölünür ve oluşan parçalardan kart numaraları büyük olan parça (ilk destenin altındaki parça) ters çevrilir. Ardından aşına olduğumuz faro karması uygulanır. Bu karma metodu *flip shuffle* olarak adlandırılır ve tersyüz karması adıyla Türkçeleştirilebilir.



Şekil 2. 50 Kart İçin Tersyüz Karması

Önceki karma metodu için yaptığımız analizi, tersyüz karması için de yapacağız. 50 kartlık bir destede her bir kartın bir tersyüz karması sonucunda kaçınıcı kart olduğunu şu şekilde inceleyebiliriz:

$1 \mapsto 2$	$26 \mapsto 49$
$2 \mapsto 4$	$27 \mapsto 47$
$3 \mapsto 6$	$28 \mapsto 45$
$\vdots$	$\vdots$
$24 \mapsto 48$	$49 \mapsto 3$
$25 \mapsto 50$	$50 \mapsto 1$

Tersyüz karması için de fonksiyon kuralını öncekine benzer bir mantıkla yazabiliriz. Bu fonksiyon 50 kartlık bir destede x 'inci kartın bir karma sonrası kaçınıcı kart olduğunu veren fonksiyondur.

$$g_{50}(x) = \begin{cases} 2x & ; x \leq 25 \\ 101 - 2x & ; x > 25 \end{cases}$$

Az önce faro karması için cevapladığımız soruyu, yani 50 kartlık bir deste kaç karma sonunda ilk konumuna döner sorusunu tersyüz karması için de soralım. Ancak burada sorunun cevabını bulmak amacıyla, faro karması için yaptığımız gibi yazdığımız fonksiyonu kullanmak yerine; faro karmasının ve tersyüz karmasının oluşturduğu grup yapıları arasında bire-bir bir eşleme bulalım.

4. Faro Karmasının ve Tersyüz Karmasının Karşılaştırılması

Teorem 1.

Faro karmasını $4n$ tane karta sahip bir desteye uyguladığımızda oluşan grup yapısı ile tersyüz karmasını $2n$ tane karta sahip bir desteye uyguladığımızda oluşan grup yapısı aynı olur.

Kant. Öncelikle, $4n$ kartlık bir deste ile $2n$ kartlık bir deste arasında bire bir bir dönüşüm tanımlayacağız. $4n$ kartlık destenin ilk $2n$ kartını alalım; bu, bizim bire bir dönüşümümüz olacak. Yani $4n$ karta sahip destenin ilk $2n$ kartı ile $2n$ karta sahip destenin tamamı arasında bir eşleme olduğunu göstereceğiz. Ayrıca, bu dönüşümün tersi, $2n$ kartlık bir desteyi kopyalayıp, oluşan iki desteden birini ters çevirerek birleştirip $4n$ kartlık desteyi elde etmek şeklinde düşünülebilir. Bu dönüşümü $4n = 20$ kart için görselleştirelim.

Aşağıdaki şemada üzeri çizgili olan numaralar, çevrilmiş kartları simgelemektedir.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \overline{10} & \overline{9} & \overline{8} & \overline{7} & \overline{6} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & \longleftrightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 \overline{10} & \overline{1} & \overline{9} & \overline{2} & \overline{8} & \overline{3} & \overline{7} & \overline{4} & \overline{6} & \overline{5} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{4} & \overline{7} & \overline{3} & \overline{8} & \overline{2} & \overline{9} & \overline{1} & \overline{10} & \longleftrightarrow & \overline{10} & \overline{1} & \overline{9} & \overline{2} & \overline{8} & \overline{3} & \overline{7} & \overline{4} & \overline{6} & \overline{5} \\
 \overline{5} & \overline{10} & \overline{6} & \overline{1} & \overline{4} & \overline{9} & \overline{7} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{8} & \overline{8} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{4} & \overline{1} & \overline{6} & \overline{10} & \overline{5} & \longleftrightarrow & \overline{5} & \overline{10} & \overline{6} & \overline{1} & \overline{4} & \overline{9} & \overline{7} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{8} \\
 8 & \overline{5} & 3 & \overline{10} & \overline{2} & 6 & \overline{7} & 1 & 9 & \overline{4} & 4 & \overline{9} & \overline{1} & 7 & \overline{6} & 2 & 10 & \overline{3} & 5 & \overline{8} & \longleftrightarrow & 8 & \overline{5} & 3 & \overline{10} & \overline{2} & 6 & \overline{7} & 1 & 9 & \overline{4}
 \end{array}$$

Bu dönüşüm değişmelidir. Yani önce $4n$ karta faro karması uygulayıp dönüşümü uygulamakla, dönüşümü uygulayıp $2n$ karta tersyüz karması uygulamak aynıdır.

Genel olarak gözlemleyebiliriz ki, $4n$ karta sahip bir desteyi alıp ortadan ikiye böldüğümüzde, destenin altta kalan kısmı üstteki destenin ters çevrilmiş haline karşılık gelir. $\square$

Bu teorem sayesinde $4n$ tane karta sahip bir desteye faro karması uygulamakla $2n$ tane karta sahip bir desteye tersyüz karması uygulamak arasında matematiksel bir fark olmadığını, yani destenin ilk konumuna ne zaman döneceğini iki karma metodu ile de aynı yöntemle hesaplayabileceğimizi gördük.

■ Teşekkür

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında katkı sağlayan ve fikir aşamasından yazım sürecine kadar her adımda değerli geri bildirimleriyle katkı sunan Prof. Dr. Bülent Saraç'a minnettarım.

■ Kaynaklar

- [1] Butler, S., Diaconis, P., & Graham, R. (2016). *The mathematics of the flip and horseshoe shuffles*. The American Mathematical Monthly, **123**(6), 542–556.
- [2] Demaine, E. D., & Demaine, M. L. (2018). *Juggling and card shuffling meet mathematical fonts*. Connections in Discrete Mathematics: A Celebration of the Work of Ron Graham, 297.
- [3] Diaconis, P., Graham, R. L., & Kantor, W. M. (1983). *The mathematics of perfect shuffles*. Advances in Applied Mathematics, **4**(2), 175–196.