

Esnek Çokgenler (Fleksagonlar) ve Biraz Sihir

CANSU BETİN ONUR¹, ELİF MEDETOĞULLARI²

¹Başkent Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

²TED Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

✉ cbetinonur@baskent.edu.tr, elif.medetogullari@tedu.edu.tr



■ Fleksagonların Keşfi: Tesadüften Matematiksel Büyüye

1939 yılında, Princeton Üniversitesi'nde yüksek lisans öğrencisi olan Arthur H. Stone, Amerikan standardında üretilmiş bir defteri İngiliz yapımı bir dosyaya yerleştirmekte zorlanınca, defterin kenarlarından taşan bölümleri şeritler halinde kesmek zorunda kaldı. Bu artan kağıt parçaları, Stone'un ellerinde sıradan bir atık olmaktan çıkıp yaratıcı bir yapıya dönüştü. Kağıt şeritlerini katlamaya başlayan Stone, katladığı şekillerden birinin beklenmedik biçimde döndürülebilir —yani yüzeyleri çevrilerek farklı yüzlerin ortaya çıkarılabilir— olduğunu fark etti. Bu yapıların her bir yüzü düzgün çokgenlerden oluşuyordu ve dinamik olarak yeniden şekillendirilebilmeleri, onları hem görsel olarak etkileyici hem de matematiksel olarak son derece ilginç kılıyordu.

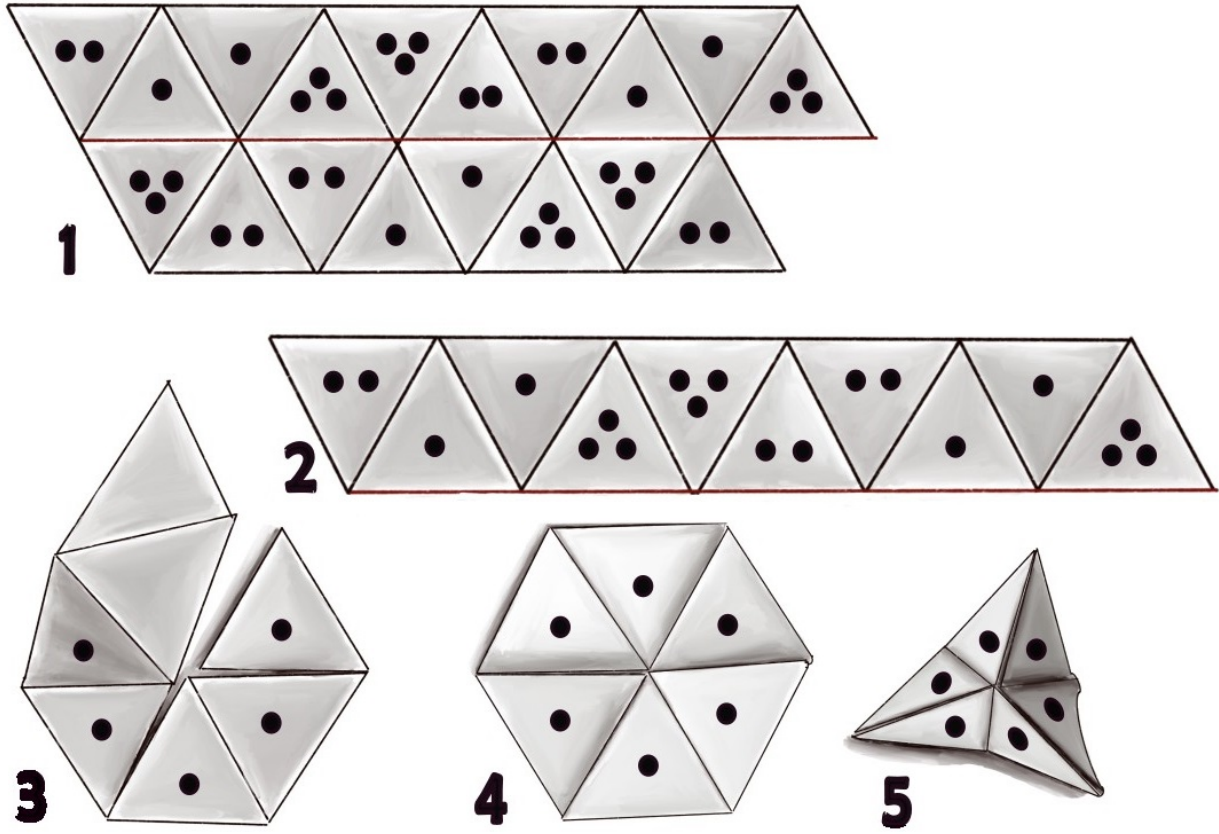
Stone'un bu keşfi kısa sürede dikkat çekti. Princeton Matematik Kulübü'ndeki arkadaşları arasında yer alan genç Richard P. Feynman —ki ileride kuantum elektrodinamiği konusundaki çalışmalarıyla Nobel Fizik Ödülü'ne layık görülecektir— bu yeni yapıların cazibesine kapılan ilk kişilerden biri oldu. Kulüpteki bir diğer isim olan Bryant Tuckerman ise fleksagonların sistematik olarak modellenmesini sağlayan matematiksel araçları geliştirdi. Bugün *Tuckerman diyagramları* olarak bilinen bu gösterimler, fleksagonların katlama ve çevirme dizilerini analiz etmek için hâlâ kullanılmaktadır.

"Fleksagon" terimi, bu yapıların esnekliğini (flexibility) ve çokgenliğini (polygon) yansıtan bir bileşik kelime olarak türetilmiştir. Biz de bu nedenle bu yapılara esnek çokgen diyeceğiz. Önce yüz sayısı, sonra kaç gen olduğu söylenerek isimlendirilirler. İlk geliştirilen örnekler genellikle altıgen şeklindeki *heksafleksagonlar* idi. Bunları zamanla farklı geometrik ve yapısal özelliklere sahip diğer türler izledi. Örneğin: **Triheksafleksagon**: Üç görünür yüzü olan en basit heksafleksagon türüdür.

Esnek çokgenler, 1950'li yıllarda Martin Gardner'ın Scientific American dergisinde yayımlanan yazılarıyla geniş kitlelere ulaştı. Gardner'ın 1956 tarihli "Flexagons" başlıklı makalesi, bu yapıların yalnızca eğlenceli oyuncaklar değil, aynı zamanda topoloji, kombinatorik ve simetri teorileriyle yakından ilişkili matematiksel nesneler olduğunu vurguladı. Bu yazıyla birlikte esnek çokgenler hem matematiksel araştırmaların hem de eğitim materyallerinin konusu haline geldi.

Bugün esnek çokgenler, matematiğin görsel ve deneysel doğasını ön plana çıkaran güçlü araçlar olarak kabul edilir. Katlamalı yüzeylerin topolojik ve kombinatorik yapıları üzerine çalışan araştırmacılar için ilham verici bir model sunarken; sınıf ortamlarında simetri, grup teorisi ve dönüşüm kavramlarını öğretmek için de etkili bir materyaldir.

Hadi hep beraber esnek çokgenler katlayalım.



Şekil 1

Esnek Altıgen (Heksafleksagon): Arthur'un keşfi olan ilk fleksagonu yapacağız. Şekil 1'de bulunan 1. resimdeki gibi, üzerinde 3 farklı desen olan toplam 18 eşkenar üçgen yer alan bir kağıt şerit oluşturalım. Sonra ortadan katlayarak yapıştıralım ve 2. resmi elde edelim. 2. resimdeyken, tüm üçgenlerin kenarlarını her iki yöne de katlayarak kat izi yapalım. Bu daha sonra esnek altıgenimizin kullanımını kolaylaştıracaktır. Şimdi üçgenleri, tümünde aynı desen aynı yöne bakacak şekilde katlayalım ve 3. resmi elde edelim (tek noktalı üçgenler bir yüzde bir araya getirilmiştir, siz isterseniz iki noktalı ya da üç noktalı üçgenleri de bir araya getirebilirsiniz). İki boş üçgen açıkta kalıyor. Bunları üst üste getirip yapıştıralım ve 4. resmi elde edelim. Esnek altıgenimiz tamamlandı. 5. resimdeki gibi parmaklarınızla içeri doğru iterek ve belki tepesinden yaprakları ayırmayı deneyerek diğer yüzlerini keşfetmeye hazırsınız? Sahi neden trihexaflexagon diyorduk buna?

İkinci esnek çokgenimiz, zaten büyüğü olan bu matematiksel oyuncığa bir de sihir katıyor. Önce kısaca meşhur sihirli karelerden bahsedelim.

■ Sihirli Kareler

Kenar uzunluğu n olan bir karenin içine 1'den n 'ye kadar n^2 doğal sayı yerleştirelim. Eğer karenin içindeki her satırın, her sütunun ve her köşegenin toplamı aynı sayı ise bu kareye **sihirli kare** denir.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

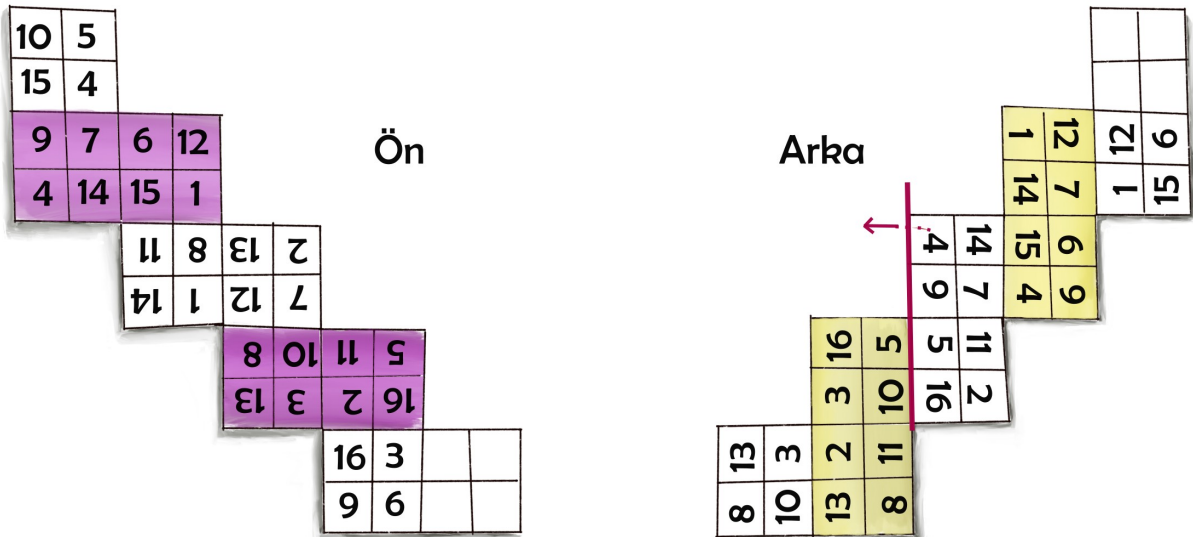
Şekil 2

Şekil 2'deki karenin herhangi bir satırını toplayın. Kaç buldunuz? Peki şimdi de sütunları deneyin. Hep 15 mi buluyorsunuz? Gelin bir de köşegenlerdeki sayıları deneyelim. $8 + 5 + 2 = 15$ ve $6 + 5 + 4 = 15$. Bunlar da 15 çıktı. Sihir gibi değil mi? İşte bu özelliğe sahip karelere sihirli kareler diyoruz. Sihirli karelerin binlerce yıllık bir geçmişi var.



Şekil 3. Rönesans dönemi ünlü Alman ressam Albrecht Dürer'in Melankoli 1 isimli resminde sağ üst köşede gizemli bir sihirli kare görünmekte. Burada yapacaklarımızdan biri belki de.

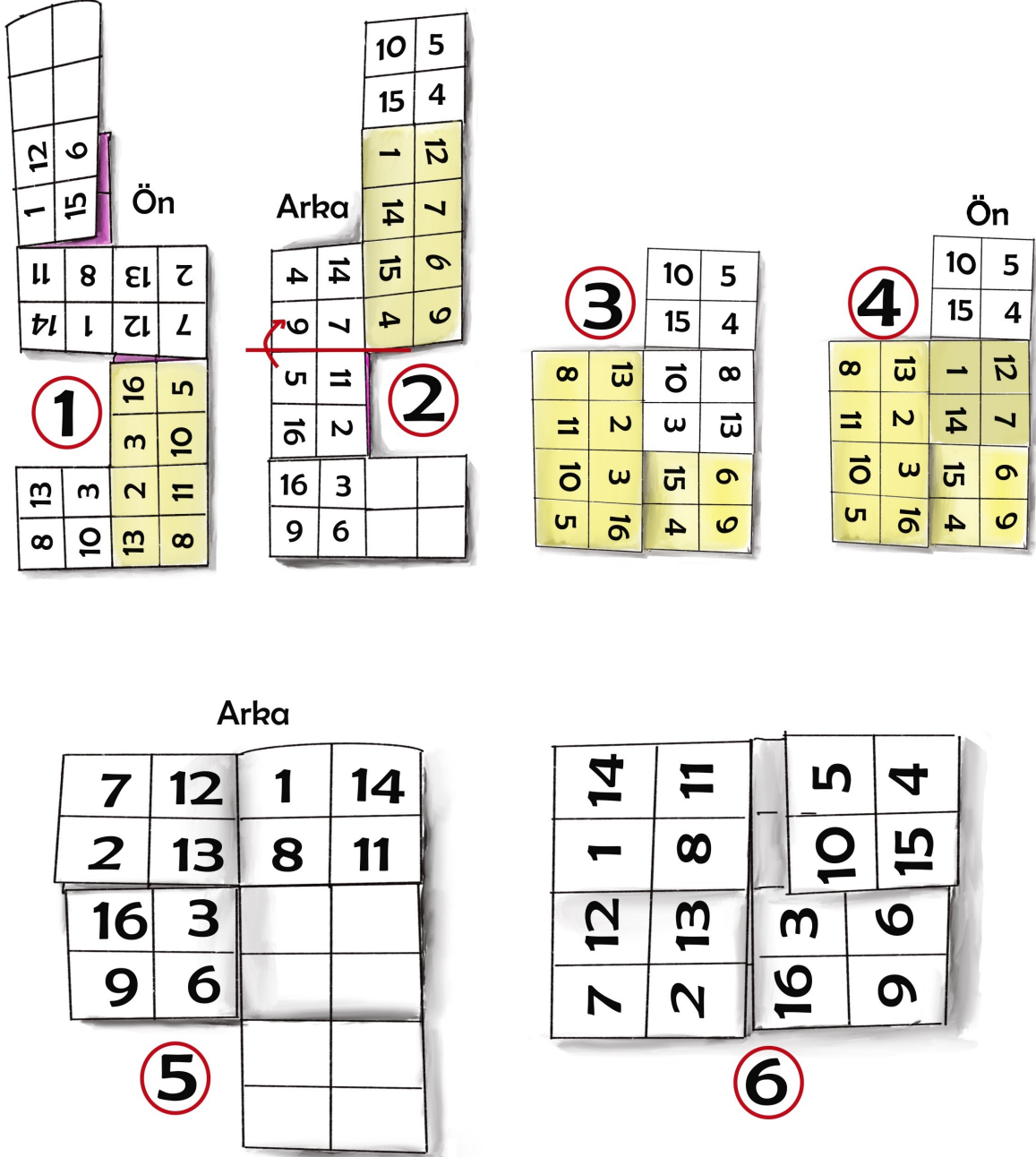
Hadi her yüzü açıldıkça sihir ortaya çıkan bir esnek çokgen yapalım.



Şekil 4

Bir kâğıt, renkli kalemler ve bir cetvel alıp Şekil 4'te "ön" yazan resimdeki gibi küçük karelere bölelim ve mümkünse belirtilen bölgeleri farklı renklerle boyayalım. Arka yüzünü çevirelim ve Şekil 4'te arka

ile belirtilen resimdeki gibi rakamları yerleştirelim ve yine belirtilen yerleri ön kısımdakinden farklı bir renk ile boyayalım. Son olarak Şekil 4'teki arka ile belirttiğimiz resimdeki gibi şeridimizi işaretli yerden arkadan saat yönünde pembe kareler üst üste gelecek şekilde katlayalım. Şekil 5'teki 1. resmi elde etmemiz gerekiyor.



Şekil 5

Şekil 5'teki 1. resmin arka yüzünü çevirelim, Şekil 5'teki 2. resmi elde edelim. Kâğıdın alt kısmını kırmızı ile işaretli çizgiden saat yönünde üç sarı kare ön yüzde buluşacak şekilde katlayalım ve Şekil 5'teki 3. resmi elde edelim. Altta kalan sarı kareleri de üst yüzeye çıkaralım ve 16 sarı kare de bize bakıyor olsun, böylece Şekil 5'teki 4. resmi elde edelim. 4. resmin arka yüzünü çevirelim ve 5. resmi elde edelim. Burada iki boş dörtlü küçük kare parçası göreceksiniz, onları yapıştıralım ve 6. resmi elde edelim (5. resmin saat yönünün tersi yönde 90 derece döndürülmüş hali resmedilmiştir.).

1'den 16'ya kadar sayıların yerleştirildiği bir sihirli kare görüyorsunuz.

Sorular: Ama her şey bu kadar mı sizce? Bu esnek çokgenin içinde başka sihirli kareler gizli olabilir mi? Kaç tane dersiniz? Buna göre bu esnek çokgenin adı ne olmalı? Sadece 4 kareden oluşan yani 1'den 4'e kadar rakamların yazıldığı ve altı farklı sihirli kare içeren bir sihirli esnek çokgen katlayabilir misiniz?

■ Kaynaklar

- [1] Martin Gardner, Hexaflexagons and other mathematical diversions, The University of Chicago Press, 1988.
- [2] <http://www.flexagon.net/index.php/magic-flexagons>
- [3] <http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html>