

Kategori Teorisi: Temel Kavramlar, Tarihsel Gelişim ve Matematiksel Düşünceye Katkısı

SULTAN EYLEM TOKSOY

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ eylemtoksoy@hacettepe.edu.tr



Bilimsel teorilerin temel işlevlerinden biri, geçmiş deneyimleri sistematik olarak organize ederek, bir sonraki kuşağın bu bilgi birikimini daha az zahmetle içselleştirmesini sağlamaktır. Bu, bilimsel etkinliğin sürdürülebilir ve kümülatif şekilde ilerleyebilmesi için gereklidir. Matematiksel düşüncede bu ihtiyaca cevap veren araçlardan biri de kategori teorisidir. Kategori teorisi bazı ünlü matematikçiler tarafından "benzetme bilimi" olarak tanımlanan matematik bilimindeki benzetmeleri sistemli biçimde ele alan disiplinler arası bir dildir. Bu dil, farklı matematiksel yapılardaki ortak özellikleri ortaya çıkararak düşünceyi derinleştiren bir soyutlama sunar. Matematiksel nesnelerle bu nesneler arasındaki dönüşümleri (morfizmaları) sistematik biçimde ele alır.

Tarihsel olarak kategori teorisine dair ilk fikirler Samuel Eilenberg ve Saunders MacLane tarafından 1942 yılında grup teorisi üzerine yazdıkları bir makalede ([2]) ortaya konmuş, ancak kavramlar tam anlamıyla bu yazarların 1945 tarihli çalışmalarında ([3]) tanıtılmıştır. Bu makalede fonktörler, doğal dönüşümler ve kategoriler kavramsallaştırılmış; kategori teorisinin cebirsel topolojiye uygulamaları ilk kez tartışılmıştır. Bu gelişme, sezgisel ve geometrik homolojiden, homolojik cebire geçişin kritik bir adımı olmuştur. Yazarlar, amaçlarının doğal dönüşümleri anlamak olduğunu belirtmiş ve bunun önce fonktörlerin ardından da kategorilerin tanımlanmasını gerektirdiğini ifade etmişlerdir. Bu çalışmalar, Emmy Noether'in soyut yapıların anlaşılması için süreçleri (özellikle homomorfizmaları) analiz etme yaklaşımının bir devamı niteliğindedir. Eilenberg ve MacLane'in çalışması, topolojik yapıların cebirsel yapılar aracılığıyla analiz edilmesini amaçlamış ve bu hedefle kategorik dili geliştirmiştir.

Bu yazıda yukarıda bahsi geçen kategori, fonktör ve doğal dönüşüm kavramları tanımlanacak ve bazı temel örnekler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi edinmek isteyen okurlara [4], [5] nolu kaynaklar önerilebilir. Öncelikle kategori teorisi kitaplarının çoğunda bulunan, küme-teorik bir arka plana ve dile sahip olan kategori tanımını verelim:

Tanım 1.

Bir $\mathcal{C}$ kategorisi

1. $Ob(\mathcal{C})$ ile göstereceğimiz nesneler sınıfından;
2. Her sıralı (A, B) nesneler çifti için $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ ile göstereceğimiz ve farklı (A, B) ve (C, D) çiftleri için $Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$ olacak şekildeki morfizmalar kümesinden;
3. $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ olmak üzere her (g, f) çiftine bunların bileşkesi denilen $g \circ f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ morfizmasını karşı getiren $Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \times Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ fonksiyonlarından oluşur; öyle ki
 - (a) Her A, B, C, D nesneleri ve $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C), h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ morfizmaları için birleşme kuralı yani $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği sağlanır.
 - (b) Her $A \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesinin, her $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$ için $f \circ 1_A = f, 1_A \circ g = g$ eşitliklerini gerçekleyen bir $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$ birim morfizması vardır.

Örnek 1.1. **Set:** Kümeler kategorisi

- (a) **Nesneler:** Bütün kümeler.
- (b) **Morfizmalar:** Kümeler arasındaki bütün fonksiyonlar. Morfizmaların bileşkesi fonksiyonların alışılmış bileşkesidir.

2. **Vect_F:** Bir F cismi üzerindeki vektör uzayları kategorisi

- (a) **Nesneler:** Bir F cismi üzerindeki tüm vektör uzaylar.
- (b) **Morfizmalar:** F cismi üzerindeki vektör uzaylar arasındaki doğrusal dönüşümler. Morfizmaların bileşkesi doğrusal dönüşümlerin bileşkesidir.

3. **Grp:** Gruplar kategorisi

- (a) **Nesneler:** Bütün gruplar.
- (b) **Morfizmalar:** Bütün grup homomorfizmaları. Morfizmaların bileşkesi grup homomorfizmalarının alışılmış bileşkesidir.

4. **Ab:** Abel gruplar kategorisi

- (a) **Nesneler:** Abel gruplar.
- (b) **Morfizmalar:** Abel grup homomorfizmaları. $\text{Mor}_{\text{Ab}}(A, B) = \text{Hom}(A, B)$ ile gösterilir. Morfizmaların bileşkesi grup homomorfizmalarının alışılmış bileşkesidir.

5. **Top:** Topolojik uzaylar kategorisi

- (a) **Nesneler:** Bütün topolojik uzaylar.
- (b) **Morfizmalar:** Sürekli Fonksiyonlar. Morfizmaların bileşkesi fonksiyonların alışılmış bileşkesidir.

6. **hoTop:**

- (a) **Nesneler:** Bütün topolojik uzaylar.
- (b) **Morfizmalar:** Homotopik fonksiyonların denklik sınıfları. Morfizmaların bileşkesi fonksiyonların alışılmış bileşkesidir. Bu kategori cebirsel topolojinin merkezinde yer alır ve morfizmaların yapıyı koruyan fonksiyonlar olmadığı bir kategori örneğidir.

7. **Ring:** Halkalar kategorisi

- (a) **Nesneler:** Bütün birimli halkalar ($1 \neq 0$).
- (b) **Morfizmalar:** Birimi koruyan halka homomorfizmaları. Morfizmaların bileşkesi halka homomorfizmalarının alışılmış bileşkesidir.

8. **R-Mod:** Sol R -modüller kategorisi

- (a) **Nesneler:** R birimli bir halka olmak üzere tüm sol R -modüller.
- (b) **Morfizmalar:** Modül homomorfizmaları. $\text{Mor}_{R\text{-Mod}}(A, B) = \text{Hom}_R(A, B)$ ile gösterilir. Morfizmaların bileşkesi modül homomorfizmalarının alışılmış bileşkesidir.

9. **Farklı bir $\mathcal{C}$ kategorisi:**

- (a) **Nesneler:** Tüm pozitif tam sayılar.
- (b) **Morfizmalar:** İki $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(m, n)$ kümesi n sayısı m ile bölünmediğinde boş küme, bölündüğünde ise tek bir $f_{m,n}$ elemanından oluşsun.

$\mathcal{C}$ bir kategoridir: Öncelikle morfizmaların bileşkesini tanımlayalım. $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f_{m,n} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(m, n)$ ve $f_{n,k} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(n, k)$ olsun. $f_{m,n} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(m, n)$ olduğundan $m|n$ ve $f_{n,k} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(n, k)$ olduğundan $n|k$ olup dolayısıyla $m|k$ olur. Yani bir $f_{m,k} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(m, k)$ morfizması vardır. Bu morfizmayı $f_{m,n}$ ve $f_{n,k}$ morfizmalarının bileşkesi olarak alalım. Yani $f_{n,k} \circ f_{m,n} = f_{m,k}$. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n|n$ olduğundan $f_{n,n}$ morfizması vardır ve $n|k$ durumunda $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(n, k)$ 'da tek bir $f_{n,k}$ morfizması var olduğundan $f_{n,k} \circ f_{n,n} = f_{n,k}$ elde edilir. Benzer şekilde $m|n$ durumunda $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(m, n)$ 'de tek bir $f_{m,n}$ morfizması var olduğundan $f_{n,n} \circ f_{m,n} = f_{m,n}$ elde edilir. O halde n nesnesinin birim morfizması olarak $1_n = f_{n,n}$ alınabilir. Ayrıca her m, n, k, l nesneleri ve $f_{m,n} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(m, n)$, $g_{n,k} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(n, k)$, $h_{k,l} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(k, l)$ morfizmaları için birleşme kuralı sağlanır. Yani $h_{k,l} \circ (g_{n,k} \circ f_{m,n}) = (h_{k,l} \circ g_{n,k}) \circ f_{m,n}$ eşitliği sağlanır ([1]).

Örneklere bakıldığında bir kategorinin, nesneleriyle değil, morfizmalarıyla karakterize edildiğine dikkat edilmelidir. Örneğin $\mathcal{T}\text{op}$ kategorisinin kategorik özellikleri ile $ho\mathcal{T}\text{op}$ kategorisinin kategorik özellikleri birbirinden farklıdır. Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde bir $f : A \longrightarrow B$ morfizması için $g \circ f = 1_A$ ve $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde bir $g : B \longrightarrow A$ morfizması bulunursa f 'ye izomorfizma denir. Örneğin Set kategorisinde izomorfizmalar birebir örten fonksiyonlar, $\mathcal{A}b$ kategorisinde grup izomorfizmaları, $\mathcal{T}\text{op}$ kategorisinde homeomorfizmalardır.

Kategori teorisi, matematiksel yapıları iki farklı şekilde birleştirir. İlk olarak, yukarıda gördüğümüz gibi, teorik olarak tanımlanmış ve uygun morfizma kavramına sahip hemen hemen her matematiksel yapı kümesi bir kategori oluşturur. Bu, küme-teorik bir ortamda sağlanan bir birleştirmedir. İkinci olarak ve belki de daha da önemlisi, bir yapı türü tanımlandıktan sonra, verilen yapıdan nasıl yeni yapıların oluşturulabileceğini belirlemek zorunludur. Örneğin A ve B gibi iki küme verildiğinde küme teorisi bunların kartezyen çarpımı dediğimiz $A \times B$ kümesini oluşturmamızı sağlar. Ayrıca verilen yapıların daha temel alt yapılara nasıl ayrıştırılabileceğini belirlemek de zorunludur. Örneğin, bir sonlu Abel grup verildiğinde, bu grup belirli alt gruplarının (dik) çarpımına nasıl ayrıştırılabilir? Her iki durumda da, belirli türdeki yapıların nasıl birleşebileceğini bilmek gerekir. Bu kombinasyonların doğası, salt küme-teorik bir bakış açısıyla bakıldığında oldukça farklı görünebilir. Kategori teorisi, bu yapıların çoğunun aslında "evrensel özelliğe" sahip bir kategorideki belirli nesneler olduğunu ortaya koymaktadır. Nitekim, kategorik bir bakış açısından, küme teorisindeki kartezyen çarpım, grupların (Abel veya değil) dik çarpımı, topolojik uzayların çarpımı ve mantık sistemlerindeki önermelerin birleşimi evrensel özelliğe sahip bir kategorideki çarpım nesnesinin özel durumlarıdır. Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde verilen X ve Y nesnelerinin çarpımı olarak adlandırılan nesne projeksiyon morfizmaları olarak adlandırılan $p : P \longrightarrow X$ ve $q : P \longrightarrow Y$ morfizmalarıyla birlikte bir P nesnesidir ve bu evrensellik özelliğini sağlar. Yani her W nesnesi ve $f : W \longrightarrow X$, $g : W \longrightarrow Y$ morfizmaları için $p \circ h = f$ ve $q \circ h = g$ olacak şekilde tek bir $h : W \longrightarrow P$ morfizması vardır. Bu çarpım nesnesi izomorfizma farkıyla tektir. Dolayısıyla kategori teorisinde, belirli bir yapıyı oluşturan unsurların doğası önemsizdir. Önemli olan, bir nesnenin kategorideki diğer nesnelerle nasıl ilişkili olduğudur. Kategori teorisi, farklı yapı türlerinin birbirleriyle nasıl ilişkili olduğunu ortaya koyar. Örneğin, cebirsel topolojide, topolojik uzaylar gruplarla (modüller, halkalar vb.) çeşitli şekillerde (homoloji, kohomoloji, homotopi, K-teorisi gibi) ilişkilidir. Kategori teorisi tam da bu bağlantıları açıklığa kavuşturmak ve karşılaştırmak için Eilenberg ve Mac Lane tarafından icat edilmiştir. İşte bu amaç doğrultusunda en önemli kavramlardan biri, fonktörler olarak adlandırılan kategoriler arasındaki morfizmalardır. Detaylı tanımı verilmeden önce fonktörler kategoriler arasında yapı koruyan dönüşümler olarak adlandırılabilir.

Tanım 2.

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. Bir kovaryant $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ fonktörü $\mathcal{C}$ 'nin her A nesnesine $\mathcal{D}$ 'nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{C}$ 'deki her $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmasına $\mathcal{D}$ 'de bir $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ morfizmasını karşı getiren ve aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir kuraldır:

1. $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ise $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ 'dir.
2. $\mathcal{C}$ 'nin her A nesnesi için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ 'dir.

Tanım 3.

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. Bir *kontravaryant* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *funktoru* $\mathcal{C}$ 'nin her A nesnesine $\mathcal{D}$ 'nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{C}$ 'deki her $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmasına $\mathcal{D}$ 'de bir $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ morfizmasını karşı getiren ve aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir kuraldır:

1. $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ise $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ 'dir.
2. $\mathcal{C}$ 'nin her A nesnesi için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ 'dir.

Örnek 2.

1. $U : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Set}$ dönüşümünü her $A \in \text{Ob}(R\text{-Mod})$ için $U(A) = A$ ve $R\text{-Mod}$ 'daki herhangi bir f homomorfizması için $U(f) = f$ olarak tanımlayalım. U bir kovaryant funktordur. U 'ya *unutkan funktor* denir. Bunun nedeni $U(A) = A$ 'nın bir küme olarak düşünülmesi yani A 'nın modül yapısının unutuluyor olması ve $U(f)$ 'nin de kümeler arasında bir fonksiyon olarak görülmesidir.
2. Bir $\mathcal{C}$ kategorisi ve $\mathcal{C}$ 'nin bir A nesnesini alalım. $F_A = \text{Mor}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

- (a) Her $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ için $F_A(B) = \text{Mor}(A, B)$.
- (b) $g : B \longrightarrow C$ için $F_A(g) : \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(A, C)$ morfizmasını $F_A(g)(f) = g \circ f$.

F_A bir kovaryant funktordur.

3. Bir $\mathcal{C}$ kategorisi ve $\mathcal{C}$ 'nin bir B nesnesini alalım. $F^B = \text{Mor}(-, B) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

- (a) Her $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ için $F^B(A) = \text{Mor}(A, B)$.
- (b) $g : A \longrightarrow C$ için $F^B(g) : \text{Mor}(C, B) \longrightarrow \text{Mor}(A, B)$ morfizmasını $F^B(g)(f) = f \circ g$.

F^B bir kontravaryant funktordur.

4. $H_n : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{A}b$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

- (a) Her X topolojik uzayına n . homoloji grubu olarak adlandırılan $H_n(X)$ grubunu karşılık getirsin.
- (b) Her $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonuna $H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ grup homomorfizmasını karşılık getirsin.

H_n bir kovaryant funktordur. Bu funktor *tekil homoloji funktor* olarak adlandırılır.

Tanım 4.

Verilen $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ve $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ fonktörleri için *doğal dönüşüm* olarak adlandırılan $\eta : F \longrightarrow G$ fonksiyonu, $\mathcal{A}$ 'nın her A nesnesine $\mathcal{B}$ 'nin bir $\eta(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$ morfizmasını karşılık getiren bir fonksiyondur öyle ki $\mathcal{A}$ 'daki her $f : A \longrightarrow A'$ morfizması için aşağıdaki diyagram değişmelidir. Yani $G(f) \circ \eta(A) = \eta(A') \circ F(f)$ 'dir.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta(A)} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(A') & \xrightarrow{\eta(A')} & G(A') \end{array}$$

$\mathcal{A}$ 'daki her A nesnesi için $\eta(A)$ morfizması bir izomorfizma ise η 'ya *doğal izomorfizma* denir.

Bir doğal dönüşüm ilgili kategorilerin morfizmaların bileşkesi gibi iç yapısını bozmadan bir funktoru diğerine dönüştürmenin yolunu sağlar. Bu nedenle bir doğal dönüşüm fonktörlerin morfizması olarak düşünülebilir. Doğal dönüşümlerin birçok örneği [4]'te verilmektedir.

Örnek 3.

1. Bir $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ fonktoru için $\mathcal{A}$ 'nın her A nesnesine $1_{F(A)}$ morfizmasını karşılık getiren $1_F : F \longrightarrow F$ bir doğal izomorfizmadır.
2. Verilen iki $U : \mathcal{G}rp \longrightarrow \mathcal{S}et$ ve $F : \mathcal{S}et \longrightarrow \mathcal{G}rp$ fonktörleri için $\eta : 1_{\mathcal{S}et} \longrightarrow U \circ F$ ve $\eta' : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathcal{G}rp}$ fonksiyonları birer doğal dönüşümdür.

Önerme 1.

İki doğal dönüşümün (dikey) bileşkesi bir doğal dönüşümdür.

Kanıt. Verilen $F, G, H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ fonktörleri için $\eta : F \longrightarrow G$ ve $\xi : G \longrightarrow H$ iki doğal dönüşüm ve $f : A \longrightarrow B$ morfizması $\mathcal{A}$ kategorisinde bir morfizma olsun. O zaman aşağıdaki diyagramı oluşturabiliriz:

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\eta(A)} & G(A) & \xrightarrow{\xi(A)} & H(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta(B)} & G(B) & \xrightarrow{\xi(B)} & H(B) \end{array}$$

η ve ξ doğal dönüşüm olduğundan, sol kare ve sağ kare değişmelidir. Yani

$$G(f) \circ \eta(A) = \eta(B) \circ F(f)$$

ve

$$H(f) \circ \xi(A) = \xi(B) \circ G(f).$$

Buradan

$$H(f) \circ \xi(A) \circ \eta(A) = \xi(B) \circ G(f) \circ \eta(A) = \xi(B) \circ \eta(B) \circ F(f)$$

elde edilir. Bu $\xi \circ \eta$ 'nin doğal dönüşüm olduğu anlamına gelir. □

Eilenberg ve Mac Lane'in ilk gözlemlediği gibi, fonktoru tanımlayabilmek için kategori, doğal dönüşümü tanımlayabilmek için de fonktor tanımlanmıştır ([4, §I.4]). Kategori teorisi, matematiğin farklı dallarındaki yapılar arasında derin birleştirici ilişkiler kurar. Fonktörler ve doğal dönüşümler sayesinde, kümelerden gruplara, topolojik uzaylardan cebirsel yapılara kadar geniş bir yelpazede yapısal dönüşümler anlam kazanır. Bu teori, hem soyut hem de uygulamalı matematiğin pek çok alanında temel bir rol oynar.

■ Kaynaklar

- [1] Alizade, R. ve Pancar, A., *Homoloji Cebire Giriş*, Yeniden Düzenlenmiş Baskı 2016. https://www.researchgate.net/publication/312136271_Homoloji_Cebire_Giris
- [2] Eilenberg, S. ve MacLane, S., Group Extensions and Homology, *Annals of Mathematics* **43** (4), (1942) 757–831.
- [3] Eilenberg, S. ve MacLane, S., General Theory of Natural Equivalences, *Transactions of the American Mathematical Society* **58** (2), (1945) 231–294.
- [4] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Second Edition 1998.
- [5] Reihl, E., *Category Theory in Context*, Dover Publications 2016.