

Düğüm Teorisine Giriş: Temel bir değişmez "Bağlanma Sayısı" üzerine

SİNEM ONARAN

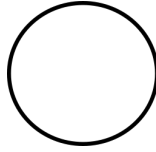
Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ sonaran@hacettepe.edu.tr



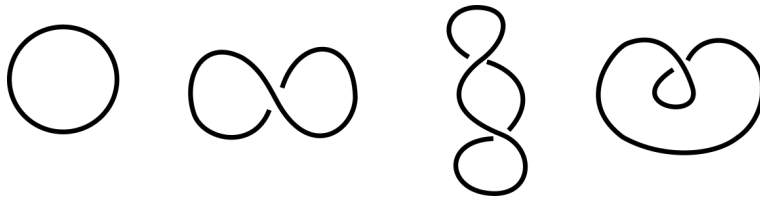
Düğüm, insanlık tarihinin en eski araçlarından. Giysi yapımından balıkçılığa, zaman ölçümünden inşaatla kadar pek çok alanda kullanılmıştır. Matematikte topolojinin bir dalı olarak çalışılan düğüm teorisi ile ilgili ilk çalışmalar 18. ve 19. yüzyıllarda Vandermonde, Gauss ve Listing tarafından yapılmıştır. 20. yüzyılda Alexander ve Reidemeister önemli adımlar atmış, Jones'un 1984'te tanımladığı polinom ise teoriyi derinleştirmiştir. Bugün düğüm teorisi; matematik dışında fizik, kimya ve özellikle DNA topolojisi gibi biyoloji alanlarında da uygulanmaktadır.

Düğüm, kendi kendini kesmeyen kapalı eğriler olarak düşünebiliriz. Matematiksel açıdan ise bir düğüm, $\mathbb{R}^3$ içinde birim çember $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 'e homeomorfik olan altkümeleri olarak tanımlanabilir. Burada, iki topolojik uzay arasında tanımlı bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve tersi f^{-1} de sürekli ise, bu fonksiyona bir homeomorfizma denir. Böylece X ve Y uzayları birbirine homeomorfik, yani topolojik olarak eşdeğer kabul edilir.



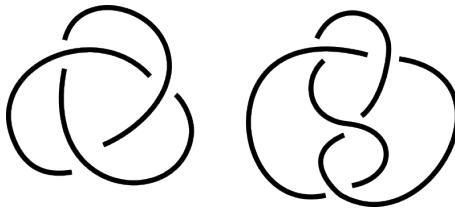
Şekil 1. Çözük düğüm.

Şekil 1'de düğüm diyagramı verilen çözük düğüm, en basit düğüm örneğidir. $\mathbb{R}^3$ uzayı içerisindeki bir düğümün diyagramı, düğümün xz -düzlemine olan izdüşümüdür. Bir düğümün birden fazla izdüşümü yani birden fazla diyagramı olabilir.



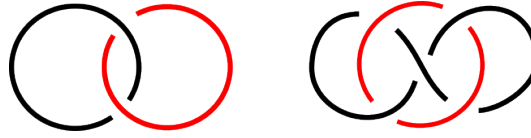
Şekil 2. Çözük düğümün birden fazla izdüşümü.

Çözük düğümden sonraki en basit düğüm örnekleri trefoil düğümü ve Sekiz düğümüdür.



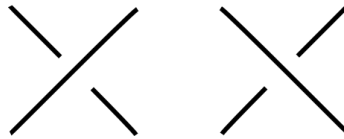
Şekil 3. Trefoil düğümü ve Sekiz düğümü.

Düğümün ayrı birleşimlerini alırsanız bir *link* elde edilir. Linki oluşturan her bir düğüm, linkin bir *bileşenidir*. 2-bileşenli linke Hopf link ve Whitehead link örneklerini verebiliriz.



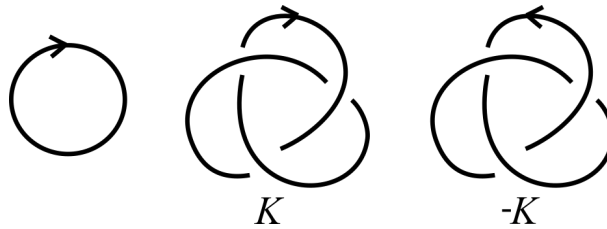
Şekil 4. Hopf link ve Whitehead link.

Bir düğüm diyagramında yayların birbirini üzerinden geçtiği yerlere *düğüm çaprazlaması* denir. Düğüm diyagramlarında iki tip çaprazlama görülebilir.



Şekil 5. Düğüm diyagramındaki çaprazlamalar.

Bir düğüm diyagramı üzerinde belirli bir nokta seçerek, bu noktadan başlayıp saat yönünde ya da saat yönünün tersine hareket edebiliriz. Diyagram üzerinde bu yönün açıkça belirtildiği düğüm ya da linke yönlü düğüm ya da yönlü link adı verilir. Yönlü düğüm örneklerini Şekil 6'de görebilirsiniz.

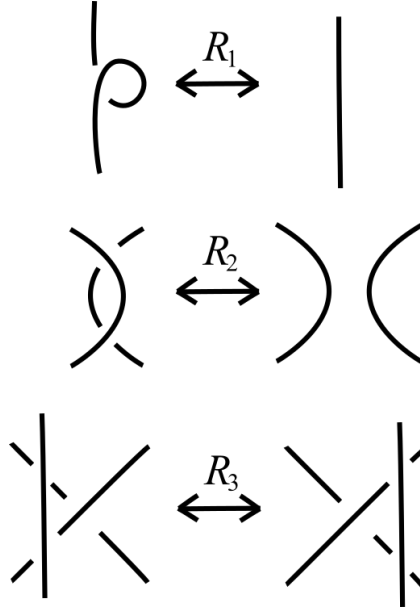


Şekil 6. Yönlü düğümler.

Peki, verilen iki düğümün birbirinden farklı olup olmadığını nasıl anlayabiliriz? Örneğin, çözükle düğüm ile trefoil düğümünün farklı olduğu nasıl ispatlanır? Bu tür soruları yanıtlayabilmek için düğüm değişmezleri adı verilen matematiksel araçlara ihtiyaç duyarız.

Düğüm değişmezleri, bir düğümün farklı diyagramlarla gösterilmesine rağmen değişmeden kalan, düğüme ait temel karakteristik özellikleri ortaya koyan niceliklerdir. Başka bir deyişle, düğüm üzerinde yapılan topolojik dönüşümlerle değişmeyen, düğümün yapısal özelliklerini koruyan ölçütlerdir. Polinom değişmezleri (örneğin Alexander, Jones veya HOMFLY polinomları), bağlantı sayısı, minimum çaprazlama sayısı ve cebir teorisi kullanarak düğüm grubu gibi birçok farklı düğüm değişmezi tanımlanmıştır. Bu değişmezler, farklı düğümleri ayırt etmenin yanı sıra, düğüm teorisinde sınıflandırma yapabilmenin de temel araçlarıdır. Aynı zamanda yön kavramı da birçok değişmezin tanımında kritik bir rol oynar; çünkü bazı düğüm değişmezleri yönlü düğümler üzerinde tanımlanır ve düğümün yönü değiştirildiğinde elde edilen değer değişebilir. Bu nedenle, yön bilgisi ve değişmezlerin birlikte kullanımı, düğüm teorisinde vazgeçilmez bir öneme sahiptir.

İki düğümün aslında aynı düğüm olup olmadığını, yani izotopik olup olmadıklarını göstermek için Reidemeister hareketlerini kullanabiliriz. Bu hareketler, düğüm diyagramı üzerinde yapılan lokal değişikliklerle, düğümün topolojik özelliğini bozmadan şeklinin değiştirilmesini sağlar. Üç temel Reidemeister hareketi vardır ve bu hareketler Şekil 7'de gösterilmiştir.



Şekil 7. Reidemeister hareketleri.

Reidemeister hareketleri, düğüm diyagramları arasında geçiş yapmanın ve eşdeğerlik göstermenin temel yollarındandır. Aşağıdaki teorem, iki diyagramın aynı düğümü temsil etmesi için bu hareketlerin yeterli olduğunu ifade eder:

Teorem 1. (Reidemeister-Markov)

İki düğüm (veya link) diyagramının aynı düğümü (veya linki) temsil etmesi için gerekli ve yeterli koşul, bu iki diyagramın sonlu sayıda R_1 , R_2 , R_3 Reidemeister hareketleri, bu hareketlerin tersleri ve düzlem izotopileri yoluyla birbirine dönüştürülebilir olmasıdır.

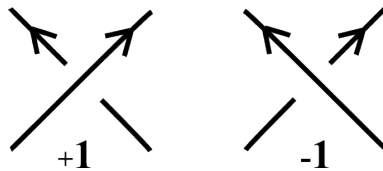
Burada izotopi, düğüm yayının sürekli bir biçimde deformasyona uğraması anlamına gelir. Düzlem izotopisi ise, bu deformasyonun düğüm yayının kendini kesmeden gerçekleştirdiği sürekli hareketlerdir.

Bir düğüm için tanımlanan bir nicelik, eğer tüm Reidemeister hareketleri altında değişmeden kalıyorsa, bu nicelik düğüm değişmezi olarak adlandırılır.

Şimdi, düğümler ve linkler için tanımlanmış önemli bir değişmez olan bağlanma sayısı üzerinde duralım. Bağlanma sayısını tanımlayabilmek için öncelikle düğüme veya linke bir yön vermemiz ve çaprazlamalarını incelememiz gerekir. Verilen yönlü düğüm veya yönlü link diyagramında her bir çaprazlama için, Şekil 8'de gösterildiği şekilde bir sayı atanır. Bu atamaya göre:

+1 -değeri verilen çaprazlamalara pozitif çaprazlama,

−1 -değeri verilen çaprazlamalara ise negatif çaprazlama denir.

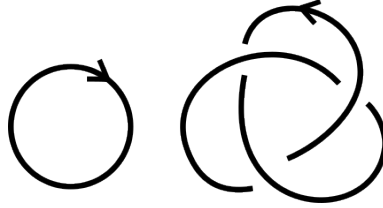


Şekil 8. Pozitif ve negatif çaprazlama.

K_1 ve K_2 olmak üzere iki yönlü bileşene sahip bir link diyagramı ele alalım. Bu iki bileşen arasında oluşan çaprazlamalardaki +1 ve −1 değerlerinin toplamının yarısı, K_1 ile K_2 bileşenleri arasındaki bağlanma sayısı

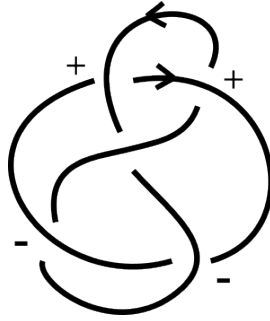
olarak tanımlanır ve $bs(K_1, K_2)$ şeklinde gösterilir. Bağlanma sayısı, Reidemeister hareketleri altında sabit kaldığından, diyagramın seçimine bağlı değildir ve bu nedenle yönlü linkler için bir topolojik değişmezdir.

Sıradaki adımda, bağlanma sayısının bazı örnek linkler üzerinde nasıl hesaplandığını birlikte inceleyelim. Örneğin; aralarında hiç çaprazlama olmadığı için Şekil 9'da verilen linkin bileşenleri için bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = 0$ 'dır.



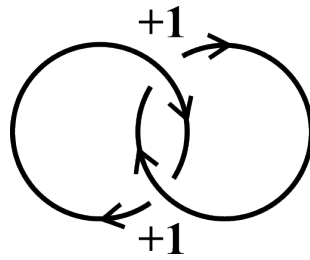
Şekil 9. Bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = 0$.

Şekil 10'da verilen Whitehead linkin bileşenleri arasındaki bağlanma sayısını hesaplarken sadece aralarındaki çaprazlamalardan gelen $+1$ ve -1 sayıları hesaba katılır ve $bs(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(-2 + 2) = 0$ 'dır.



Şekil 10. Whitehead linkin bileşenlerinin bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = 0$.

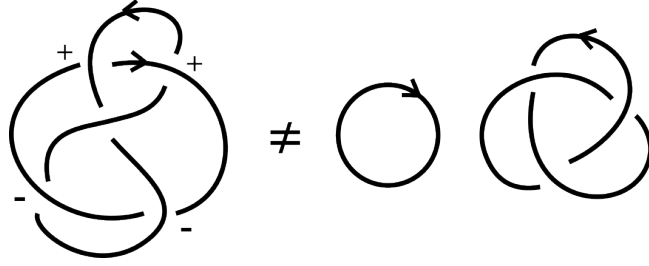
Hopf linkin bileşenleri arasındaki bağlanma sayısını ise $bs(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(+1 + 1) = +1$ olarak hesaplarız.



Şekil 11. Pozitif Hopf link, bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = +1$.

Whitehead link ile Hopf link'in bileşenleri arasındaki bağlanma sayıları farklı olduğundan, bu iki linkin birbirinden farklı olduğu sonucuna varabiliriz. Ancak, bağlanma sayısı aynı olan her iki linkin mutlaka aynı olması gerekmez. Örneğin, ilk bağlanma sayısını hesapladığımız link örneği ile Whitehead link'in bileşenleri arasındaki bağlanma sayısının her iki durumda da 0 olduğunu gördük. Buna rağmen, bu iki link topolojik olarak farklıdır. Bu durum, bağlanma sayısının bazı linkleri ayırt etmekte yetersiz kaldığını ve daha güçlü değişmezler ihtiyacı duyulduğunu göstermektedir. Bu tür değişmezlerin incelenmesi ise başlı başına ayrı bir yazının konusu olabilir.

Düğüm teorisinin temel hedeflerinden biri, tüm düğümleri belirli kurallara göre sınıflandırmaktır. Bu sınıflandırma sürecinde, düğüm değişmezleri önemli bir rol oynar; çünkü aynı düğümü temsil eden farklı



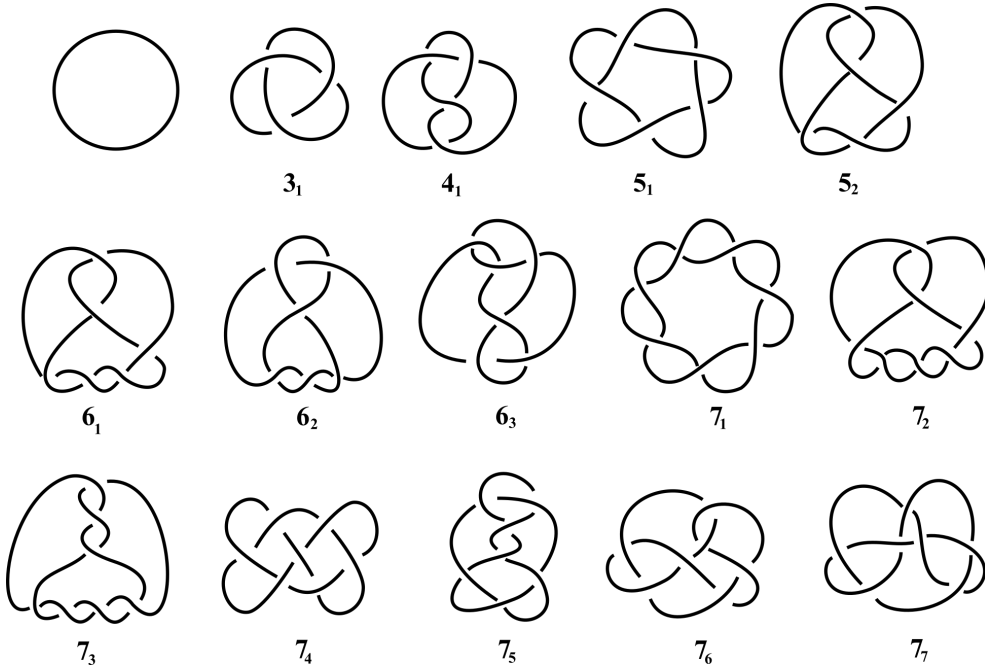
Şekil 12. Bağlanma sayıları aynı olan iki farklı link.

diyagramlar olsa bile, değişmezler sabit kalır ve düğümler arasındaki farkları ortaya koymaya yardımcı olur. Düğüm tablosu, belirli bir çaprazlama sayısına kadar olan düğümlerin sistematik şekilde listelendiği, sınıflandırmayı görselleştiren önemli bir araçtır. Bu tablolar sayesinde düğümler kolayca tanımlanabilir, karşılaştırılabilir ve topolojik yapıları üzerine analiz yapılabilir.

Son olarak, yazımızı sadece bilgiyle değil, biraz da merakla bitirelim:

Bağlanma sayısı neden daima tam sayıdır?

Bu sorunun cevabını düşünürken, aşağıdaki düğüm tablosu size ilham verebilir.



Bu düğüm tablosunda, çaprazlama sayısı en fazla yedi olan düğüm diyagramları listelenmiştir. Düğümlerin adlandırılması ve sıralanmasında Alexander ve Briggs'in 1926 yılında geliştirdikleri notasyon sistemi esas alınmıştır.

■ Kaynaklar

- [1] A. Adams, *The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots*, American Mathematical Society.
- [2] K.Reidemeister, *Knotentheorie*, Berlin: Springer-Verlag, 1932.
- [3] D. Rolfsen, *Knots and links*, Berkeley, California: Publish or Perish Press, 1976.