

Oy çokluğuna dayalı kararlar üzerine

ÜMIT IŞLAK

Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ umit.islak1@bogazici.edu.tr



1. Giriş

Bir grup insan olarak doğru ya da yanlış olabilecek bir karara varmak üzereyiz. Çoğunluğun kararını takip edersek mi yoksa gruptan rastgele bir kişiyi seçip onun dediğini takip edersek mi doğru karara ulaşma olasılığımız daha yüksek olur? Bu yazıda bu sorunun etrafında düşüneceğiz. Başlangıç noktamızsa şu bulmaca olacak.

(Ailenin kararı) Üç kişilik bir aile düşünelim. Bu aile önemli bir karar vermenin arifesinde ve kararları ya doğru ya da yanlış olacak. Ailedeki her bir kişinin doğru kararı vermesi olasılığı birbirine eşit ve bu olasılık $p \in (0, 1)$.

Üç kişinin de kararı duyulup çoğunluğun kararına uyulursa doğru kararın çıkması olasılığı ne olur? Bu olasılık p 'den büyük müdür, küçük müdür?

Bu bulmacanın çözümüne hemen bir sonraki bölümde bakacağız. Öncesinde, ailenin nihai karara ulaşmak için aralarından birini rastgele seçtiği ve onun seçiminde karar kıldığı alternatif duruma hemen bakabiliriz. Bu durumda ailenin doğru karara varma olasılığı,

$$\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p = p$$

olur; zira üç kişiden herhangi birini $1/3$ olasılıkla seçiyoruz ve bunu takiben bu kişi p olasılıkla doğru karara varıyor. Yani aslında bulmacadaki asıl merak ettiğimiz şey, çoğunluğun kararını takip edip doğruya ulaşma olasılığının rastgele bir kişinin kararını takip edip doğruya ulaşma olasılığından daha büyük olup olmadığı. Bir başka deyişle, çoğunluğun karar vermesiyle doğruya ulaşma olasılığımız acaba p 'den büyük müdür?

Bir sonraki bölüme geçmeden önce içgüdüsel olarak bulmacanın cevabının p 'den büyük mü, küçük mü olacağını düşünmek sizin için faydalı olacaktır. Unutmadan, bu büyüklük küçüklük meselesi p 'nin değerine bağlı olabilir!

2. Ailenin kararı

Belirli bir $p \in (0, 1)$ için ailedeki her bir kişinin doğru kararı vermesi olasılığının birbirine eşit ve p olduğunu varsaymıştık. Üç kişinin de kararını duyup çoğunluğun kararına uyarsak aileden doğru kararın çıkması olasılığıyla ilgileniyorduk. Bu bölümde bu sorunun cevabına ulaşp sonraki bölümde bir genelleştirmeye bakacağız.

Ailedeki üç kişiyi birinci, ikinci ve üçüncü kişiler olarak düşünebiliriz. Öncelikle, bu üç kişiden her birinin verdiği doğru ve yanlış kararı D ve Y olarak kısaltırsak $2^3 = 8$ farklı durum olabileceğini gözlemleyelim:

$$DDD, DDY, DYD, YDD, YYD, YDY, DYY, YYY.$$

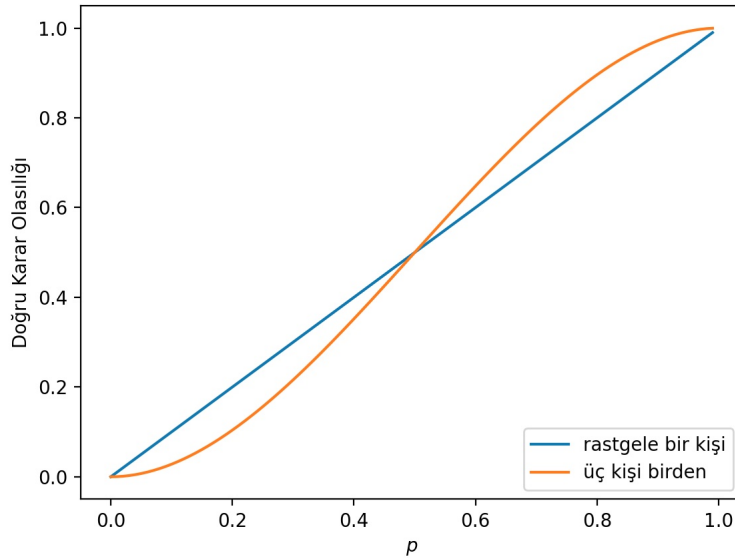
Örneğin DDY , ilk iki kişinin doğru, üçüncünün yanlış karar verdiği durumu gösteriyor.

Çoğunluğun kararına uyulduğuna göre, bu sekiz durumdan DDD, DDY, DYD ve YDD nihai olarak doğru karara varmamızı sağlamakta. Bunlardan DDD 'nin olasılığı p^3 . DDY 'nin olasılığı $p \cdot p \cdot (1 - p) = p^2 \cdot (1 - p)$. Benzeri şekilde DYD ve YDD 'nin olasılıkları da $p^2 \cdot (1 - p)$. Karşılık gelen bu olasılıkları topladığımızda $p^3 + 3p^2(1 - p)$ buluyoruz. Yani çoğunluğun kararına uyarsak doğru karar verme olasılığı

$$\phi(p) := p^3 + 3p^2(1 - p)$$

değerine eşitmiş.

Python'da kısacık bir kod yazarak oluşturulan aşağıdaki şekilden görüleceği üzere $\phi(p)$ değeri, $p < 0,5$ 'ken p 'den küçük çıkarken, $p > 0,5$ 'ken p 'den daha büyük çıkmaktadır. O halde $p < 0,5$ 'ken rastgele bir kişinin kararını takip etmek, doğru kararı verme olasılığını artırıyor! Yani insanlar bireysel olarak hata yapmaya meyillilerse oy çokluğuna göre hareket edince hata yapmaya daha da meyilli oluyorlar!



$p < 0,5$ durumunda $\phi(p) < p$ olduğunu şekil üzerinden gördük ama dilersek bunu cebirsel olarak da gösterebiliriz. Tek yapmamız gereken $\phi(p) < p \Leftrightarrow p^3 + 3p^2(1 - p) < p \Leftrightarrow p^3 + 3p^2(1 - p) - p < 0 \Leftrightarrow p(2p^2 - 3p + 1) > 0$ olduğunu gözlemlemek ve en sondaki eşitsizliğin $p < 0,5$ olduğunda sağlandığı sonucuna varmak.

Buradaki şaşırtıcı olan ve peşine düşeceğimiz gözlemimizi bir kez daha vurgulayalım.

Ailedeki üç kişiden her birinin doğru karara varma olasılığı 0,5'ten küçük bir değere eşitse, oy çokluğuna göre hareket ettiklerinde yanlış karara varma olasılıkları, rastgele bir aile bireyinin yanlış karara varma olasılığından daha büyüktür.

Önümüzdeki bölümde bu gözlemi üç kişi yerine daha fazla kişi olsaydı durumuna genelleştirecek, sonrasında da bireylere karşılık gelen olasılıklar farklı olsaydı ne olurdu sorusuna bakacağız. Bu bölümü size benzeri bir soruyu alıştırmaya bırakarak bitirelim.

Alıştırma. İki çeşit jüri düşüneceğiz.

- Birinci çeşit jüri üç kişiden oluşsun. Jüri üyelerinden ikisinin doğru karar verme olasılıkları p değerine eşit. Üçüncü üyenin doğru karar verme olasılığı ise $1/2$. Jürinin nihai kararı da çoğunluğun kararı olsun.
- İkinci çeşit jüri ise doğru kararı verme olasılığı p olan sadece bir kişiden oluşsun.

Hangi jüri çeşidinin doğru kararı vermesi olasılığı daha yüksektir? (Cevap: İkisinde de aynıdır.)

3. Daha genel bir problem

Önceki bölümde üç kişilik bir aile üzerinden tartıştığımız sorunun doğal bir genelleştirmesi var. Ailede üç yerine daha fazla kişi olsaydı ne olurdu? Bir ailedeki birey sayısının alabileceği birey sayısı kısıtlı olduğu için sorunun şimdiki halini bir toplum üzerinden düşünelim. Dileyenler toplumsal olarak verilmesi gereken bir kararı kafasında canlandırıp durumu daha da somutlaştırabilir.

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $2m + 1$ bireyden oluşan bir toplum düşünelim. Bu toplum önemli bir karar verme arifesinde ve kararları ya doğru ya da yanlış olacak. Toplumdaki her bir kişinin doğru kararı vermesi olasılığı birbirine eşit ve bu olasılık $p \in (0, 1)$.

$2m + 1$ kişinin de kararını duyup çoğunluğun kararına uyarsak doğru kararın çıkması olasılığı $\phi_{2m+1}(p)$ ne olur? Bu olasılık p 'den büyük müdür, küçük müdür? m arttıkça bulduğumuz olasılık nasıl değişir?

$m = 1$ durumunu zaten bir önceki bölümde halletmiştik. $m = 2$ olursa toplam 5 kişi olur. Öyleyse toplumun doğru kararı vermesi için en az 3 kişinin doğru kararı vermiş olması gerekir; yani 3, 4 ya da 5 kişinin doğru kararı verdiği durumların olasılıklarını toplamalıyız. Tam olarak 3 kişinin doğru karar verebilmesi olasılığı için 5 kişiden 3 kişiyi $\binom{5}{3}$ farklı şekilde seçebileceğimizi ve böylesi bir seçimin istediğimizi sağlaması olasılığının $p^3(1 - p)^2$ olduğunu gözlemleyelim. 4 ve 5 durumları için de aynı şekilde düşündüğümüzde,

$$\phi_5(p) = \binom{5}{3}p^3(1 - p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1 - p)^1 + \binom{5}{5}p^5(1 - p)^0$$

buluruz.

m 'nin 1 ve 2 olduğu durumlar artık genel durumun nasıl olacağını da belli etmekte. Toplumda $2m + 1$ kişi varsa nihai kararın doğru karar olması için en az $m + 1$ kişinin doğru kararı vermesi gerekir. Tam olarak $i \in \{0, 1, \dots, 2m + 1\}$ kişinin doğru kararı vermesi olasılığının

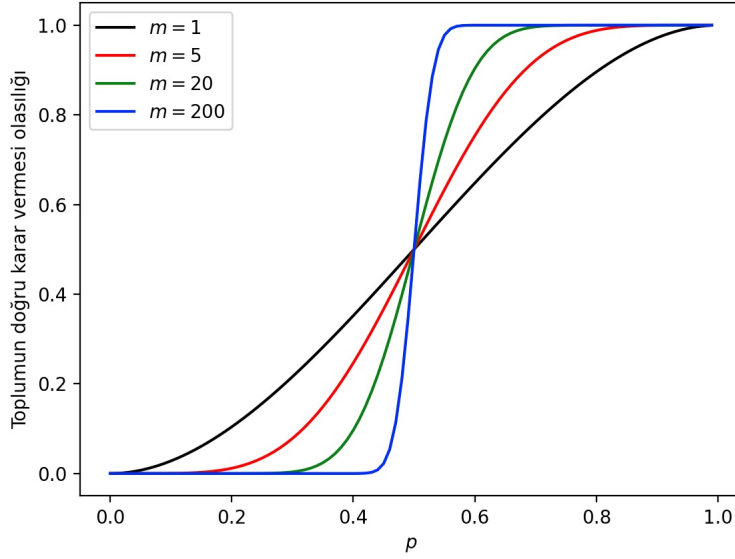
$$\binom{2m+1}{i}p^i(1 - p)^{2m+1-i}$$

olduğunu gözlemlersek ve uygun değerler üzerinden toplam alırsak nihai kararın doğru karar olması olasılığının,

$$\phi_{2m+1}(p) = \sum_{i=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i}p^i(1 - p)^{2m+1-i}$$

olduğunu görürüz.

Şimdi ilk olarak m 'nin farklı değerleri için p değeri 0'dan 1'e doğru değişirken toplumun doğru kararı vermesi olasılığı $\phi_{2m+1}(p)$ 'nin nasıl değiştiğine bir bakalım:



Şekilden görüleceği üzere $p < 0,5$ durumunda kişi sayısı m arttıkça doğru kararın alınması olasılığı düşüyor. Yani eğer bireyler yanlış seçmeye meyilliyse bir araya gelerek yanlış seçmeye daha da meyilli hale geliyor! İçgüdüsel olarak hissedilebilir olsa da matematiksel olarak gösterilişi de oldukça ilgi çekici kanımca.

Peki $p = 0,5$ olsaydı ne olurdu? Burada sürpriz yok ve toplumun doğru karara varma olasılığı da $0,5$; ne de olsa tamamen simetrik bir durum var ortada. Tabii dilerseniz bunu bulduğumuz formülü ve binom katsayılarının simetrisini kullanarak da gözlemleyebilirsiniz:

$$\begin{aligned} \phi_{2m+1}(0,5) &= \sum_{i=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i} (0,5)^i (0,5)^{2m+1-i} = (0,5)^{2m+1} \sum_{i=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i} \\ &= (0,5)^{2m+1} \frac{2^{2m+1}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Buraya kadarki hesaplamalarımızda tek sayıda kişinin olduğunu varsaydık. Çift sayıda kişi olsaydı doğru ve yanlışların berabere kalması gibi bir durum da olabilirdi ve bunu göz önünde bulundurmanız gerekirdi. Çok da ciddi bir sıkıntı oluşturmayacak bu durumda nasıl bir yol izlenebileceği üzerine kafa yormayı size bırakalım.

Son olarak toplumdaki her bireyin doğru kararı vermesi olasılığının sabit bir p değerine eşit olduğunu varsaydığımızı hatırlayalım. Bu varsayım elbette ki gerçekçi değil. Bir sonraki görece teknik olan bölümde de bu konuda kısa bir tartışma gerçekleştireceğiz.

4. Özdeş olmayan bireyler durumu

Güzel bir soruyla uğraştık ama bireylerin doğru karara ulaşması olasılığının aynı olması varsayımı üzerinde oynama yapıp yapamayacağını da bir yandan merak ediyor insan. Bu bölümde içgüdüsel olarak açık olan bir başka durumun matematiksel açıklamasını vereceğiz. İddiamız aşağı yukarı şöyle. Toplumdaki bireylerin doğru karara varma olasılıklarının kişiden kişiye değişebildiğini ama her birinin $0,5$ 'ten küçük olduğunu varsayalım. Bu durumda toplumda çok fazla kişi varsa ve nihai karar oy çokluğuna göre verilirse doğru karara varılması olasılığı yine 0 'a yakın olacaktır. (Sonuç bölümünde daha da genel bir durum okurun ilgisine sunulacaktır.) Tabii burada birkaç muğlak ifade var, bunları netleştireceğiz. Aşağıdaki tartışma daha teknik ve olasılık teorisinden burada her birinin detayına giremeyeceğimiz bazı tanımlara ve sonuçlara ihtiyaç duyuluyor. Dileyenler bu bilgilere [1] ya da [2] referanslarından ulaşabilir ya da bu bölümün okuması ilerleyen bir zamana ertelenebilir.

Ana gözlemimizin ispatında kullanacağımız en önemli araç olasılık teorisi ve ilgili alanlardaki meşhur sonuçlardan bir tanesi olan Chernoff eşitsizliğidir. Asıl tartışmamıza geçmeden önce bu eşitsizliği bu noktada ifade edelim, meraklıları için ispatını da en sona ekleyelim.

Teorem 1. (Chernoff eşitsizliği)

$X_1, \dots, X_n$ bağımsız, 0 ya da 1 değerlerini alan Bernoulli rassal değişkenleri olsun; $p_i = \mathbb{P}(X_i = 1)$ diyelim. $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ve $\mu = \mathbb{E}[X]$ tanımlayalım. Bu durumda herhangi bir $\delta > 0$ için,

$$\mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) \leq e^{\frac{-\delta^2 \mu}{2 + \delta}}$$

eşitsizliği doğrudur.

4.1. Ana netice

Şimdi asıl konumuza dönüyoruz. İspatlayacağımız sonuç şu:

$n \in \mathbb{N}$ bireyden oluşan bir toplum düşünelim. Bu toplum önemli bir karar verme arifesinde ve kararları ya doğru ya da yanlış olacak. Toplumdaki kişileri 1, 2, ... şeklinde isimlendirelim. $j \in \mathbb{N}$ numaralı kişinin doğru kararı vermesi olasılığını p_j ile gösterelim ve

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} p_j \leq p_* < 1/2$$

olduğunu varsayalım. Toplumun nihai kararının oy çokluğuna göre verildiğini düşünelim. Bu durumda,

$$\mathbb{P}(\text{toplumun nihai kararının doğru olması}) \leq e^{-\left(\frac{(1-2p_*)^2}{4p_*+2}\right)n}$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Buradan, n sonsuza giderken toplumun doğru karara ulaşması olasılığının 0'a yakınsadığı görülür.

Şimdi Chernoff eşitsizliğinden yararlanarak iddiamızı ispatlayacağız. Toplam n kişinin doğru ya da yanlış bir tercihte bulunduğunu hatırlayalım.¹ Nihai olarak doğru karara varılabilmesi için $n/2$ tanesinden daha fazlasının doğru kararı vermiş olması gerekli. $j = 1, \dots, n$ için

$$X_j = \begin{cases} 1, & j\text{'inci kişi doğru karara vardıysa,} \\ 0, & \text{diğer durumda,} \end{cases}$$

rassal değişkenlerini tanımlayalım. Bu durumda her bir j için X_j , parametresi p_j olan bir Bernoulli rassal değişkenidir. $X = \sum_{j=1}^n X_j$ tanımını verirsek, X doğru tercih yapmış olan kişilerin sayısı olacaktır. O halde,

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right)$$

olasılığını anlamak istiyoruz.

μ ile X 'in beklenen değerini gösterirsek, beklenen değer doğrusallığı ile

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n X_j\right] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j] = \sum_{j=1}^n p_j$$

olacağını aklımızda tutalım. Burada her bir p_j 'nin $p_* \in (0, 1/2)$ sayısından küçük veya eşit olduğunu

¹Burada n çift sayı olursa doğru karara varanlarla yanlış karara varanların sayısı eşit olabilir. Bu durumda toplumun bir karara varamadığını düşünebiliriz. Bu aşağıdaki hesaplarımızla ilgili herhangi bir sorun yaratmamaktadır.

varsaydığımız için

$$0 \leq \mu \leq np_* < \frac{n}{2}$$

olacaktır.

Şimdi Chernoff eşitsizliğini kullanma zamanı. Bu amaçla $\delta = \frac{n}{2\mu} - 1$ tanımladığımızda, Chernoff eşitsizliğiyle şu sonuca ulaşırız:

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right) = \mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) \leq e^{\frac{-\delta^2\mu}{2+\delta}} = e^{-\frac{\left(\frac{n}{2\mu}-1\right)^2\mu}{2+\frac{n}{2\mu}-1}} = e^{-\frac{(n-2\mu)^2}{4\mu+2n}} \quad (1)$$

sonucuna ulaşırız. ($0 \leq \mu < (0,5)n$ olmasından ötürü $\delta > 0$ olduğunu ve Chernoff eşitsizliğini kullanabildiğimizi gözlemleyin.) Burada son basamakta birkaç basit hesap yaptık, detaylar sizde. Bu noktaya kadarki ilermeyi not düşmemiz güzel olabilir.

Toplulumun nihai kararının doğru olması olasılığı $\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right)$, şu eşitsizliği sağlar:

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right) \leq e^{-\frac{(n-2\sum_{j=1}^n p_j)^2}{4\sum_{j=1}^n p_j+2n}}$$

Şimdi iki farklı özel duruma bakacağız.

- Diyelim ki önceki bölümlerdeki gibi p_j 'lerin her biri sabit bir $p \in [0, 1/2)$ reel sayısına eşit. Bu durumda, ufak tefek işlemlerin ardından

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right) \leq e^{-\left(\frac{(1-2p)^2}{4p+2}\right)n}.$$

olduğunu görürüz. Buradan da böylesi sabit bir p değeri durumu için n artarken toplulumun doğru karara ulaşması olasılığının sahidinden de 0'a doğru yaklaştığını gözlemlemekteyiz.

- Şimdi de p_j 'lerin farklı olabileceğini ama bölümün başında varsaydığımız gibi

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} p_j \leq p_* < 1/2$$

olduğunu düşünelim. Bu durumda,

$$\mu = \sum_{j=1}^n p_j \leq np_*$$

olacaktır. Bu eşitsizliği, (1) numaralı ifadede ulaştığımız asli eşitsizlik için bir üst sınır bulmakta kullandığımızdaysa,

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right) \leq e^{-\frac{(n-2np_*)^2}{4np_*+2n}} = e^{-\left(\frac{(1-2p_*)^2}{4p_*+2}\right)n}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Burada $\frac{(1-2p_*)^2}{4p_*+2} > 0$ olmasından ötürü, toplum tarafından doğru kararın çıkması olasılığı kişi sayısı artarken yine üstel olarak 0'a doğru yakınsamakta!

4.2. * Chernoff eşitsizliğinin ispatı

Bu bölümde meraklıları için Chernoff eşitsizliğinin standart bir ispatına değineceğiz. Bu ispat da görece teknik ve dileyenler önceki tartışmamızı olduğu gibi bu kısmı da ilk okumada atlayabilir. İspatta kullanılacak ve görece daha temel olan Markov eşitsizliği ve kalkülüs kökenli bir eşitsizliği ispatına yer vermeden sadece ifade edeceğiz.

Teorem 2. (Markov eşitsizliği)

X , negatif değerler almayan bir rassal değişkense, her $t > 0$ için,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

eşitsizliği doğrudur.

Önerme 1.

δ pozitif bir reel sayıysa şu eşitsizlik doğrudur:

$$\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta) \leq -\frac{\delta^2}{2 + \delta}.$$

Şimdi Chernoff eşitsizliğini hatırlayıp ispatına odaklanabiliriz.

Teorem 3. (Chernoff eşitsizliği)

$X_1, \dots, X_n$ bağımsız Bernoulli rassal değişkenleri ve $i = 1, \dots, n$ için $p_i = \mathbb{P}(X_i = 1)$ olsun. $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ve $\mu = \mathbb{E}[X]$ tanımlayalım. Bu durumda herhangi bir $\delta > 0$ için,

$$\mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) \leq e^{\frac{-\delta^2 \mu}{2 + \delta}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. $t > 0$ olsun. X_i 'lerin bağımsız olduğunu aklımızda tutup, Markov eşitsizliği ve $1 + \alpha \leq e^\alpha$ eşitsizliğinden yararlanıp, bir takım basit işlemler gerçekleştirerek şu sonuca ulaşırız:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) &= \mathbb{P}(tX > t(1 + \delta)\mu) = \mathbb{P}(e^{tX} > e^{t(1 + \delta)\mu}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\mathbb{E}[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\prod_{i=1}^n (p_i e^t + 1 - p_i)}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + p_i(e^t - 1))}{e^{t(1 + \delta)\mu}} \\ &\leq \frac{\prod_{i=1}^n e^{p_i(e^t - 1)}}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t - 1) \sum_{i=1}^n p_i}}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t - 1)\mu}}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = e^{\mu((e^t - 1) - t(1 + \delta))}. \end{aligned}$$

(Bağımsızlık varsayımı, $\frac{\mathbb{E}[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\mathbb{E}[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}}$ eşitliğine ulaşmak için kullanılmıştır.) Şimdi en sağdaki üst sınırı t üzerinden optimize etmek gerekli. Bu amaçla $t_* = \ln(1 + \delta)$ yerleştirip üst sınırı hesapladığımızda,

$$\mathbb{P}(X > \mu(1 + \delta)) \leq e^{\mu(\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta))}$$

buluruz. Önerme 1'deki eşitsizlik kullanıldığında iddiamız ispatlanmış olur:

$$\mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) \leq e^{\frac{-\delta^2 \mu}{2 + \delta}}.$$

□

5. Sonuç

Bu yazıda üç kişilik bir ailenin oy çokluğuna göre vereceği bir karar için yazdığımız bir bulmacayla başlayıp soruyu genişlettik ve hatalı kararlar vermeye meyilli insanlar bir araya gelip bir karara vardıklarına hata

yapma olasılıklarının daha da arttığını gözlemledik. Bu noktada okur peki doğru karar vermesi olasılığı 0, 5'ten büyük olan insanlar da olsaydı ne olurdu diye merak edebilir. Böylesi bir durumu analiz etmek gibi bir niyetiniz olursa n kişinin olduğu bir durumda doğru karar vermesi olasılığı 0, 5'ten düşük olan kişilerin $h_1(n)$ tane, 0, 5'ten büyük olan kişilerin $h_2(n)$ tane olduğunu varsayıp h_1, h_2 fonksiyonları ve bu iki gruptaki bireylerin olasılıkları üzerinde çeşitli varsayımlar yaparak yine ilginç sonuçlara ulaşabilirsiniz. Tabii işler gittikçe teknikleşip profesyonel matematik sınırlarına yaklaşmakta. Bununla beraber dilerseniz bilgisayar yardımıyla çeşitli denemeler yapıp gözlemlerde bulunabilir, sanılar ortaya atabilirsiniz. Oy çokluğuna dayalı karar verilen durumlarla karşılaştığınızda, hatalı kararlar vermeye meyilli insanların etrafınızda az olması dileklerle!

Teşekkür. Yazının son halinin üzerinden gidip faydalı yorumlarda bulunan Erdem Efe Delen'e teşekkür etmek isterim.

■ Kaynaklar

- [1] Işlak, Ümit. Olasılık Teorisine Kısa Bir Giriş, Matematik Dünyası Dergisi, 2023.
- [2] Işlak, Ümit. Temel Olasılık Teorisi ve İstatistik I. Nesin Yayıncılık, 2022.