

# Fuzzy Yaşantılarımızda Fuzzy Kümeler

DAMLA NİGAR

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü Yüksek Lisans Öğrencisi

✉ damlanigar@hacettepe.edu.tr



Çok uzun zaman boyunca küme teorisi Aristoteles'in 0,1 mantığı ile ilerlemiştir. Yani klasik küme teorisinde, evrensel kümenin elemanlarının bir kümenin kesin olarak elemanı olması ya da olmaması durumu söz konusudur. Oysa 1965 yılında Zadeh'in ortaya attığı “fuzzy küme” kavramı, klasik küme teorisini de kapsayan, ancak daha geniş ve gerçek hayata daha yakın bir anlayış sunmuştur. Fuzzy (bulanık) Küme teorisinde bir elemanın (bir nesnenin) bir kümeye kesin ait olmak ya da kesin ait olmamak gibi keskin bir çizgisi yoktur.

Burada, bir nesne bir kümeye belirli bir derecede aittir ve aynı zamanda belirli bir derecede de ait değildir. Matematikğin gerçeklerle, hayatla ve hatta duygularla bile örtüşebildiği bir teori olmasından ötürü bu yazıda “fuzzy kümeler” ile ilgili genel bilgiler verilecek ve bunların hayatla özdeşleştiği noktalara dikkat çekilecektir.

## ■ Fuzzy (Bulanık) Kümeler ve Üyelik Fonksiyonları

Giriş kısmında bahsedildiği üzere, fuzzy kümeler keskin sınırları olmayan, birçok alana (Mühendislik, Uygulamalı Matematik, Fizik, Psikoloji vb.) uygulanabilen ve bu sayede daha esnek ve daha kapsamlı bilgilere ulaşabilmemize aracı olan kümelerdir. Bu kümeler için bir nesnenin %100 ait olma ya da ait olmama durumu söz konusu olmadığından, o kümeye ne kadar ait olduğunu tanımlayabilmek için “üyelik fonksiyonları” kullanılır.

Klasik küme teorisinde, bir  $A$  kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $X$ ,  $A$  kümesini içeren evrensel kümeyi,  $x$  ise  $X$ 'in keyfi bir elemanını ifade etmektedir. Yani karakteristik fonksiyon, evrensel kümenin elemanlarını ya 0 ya da 1 değerine götürür. Bu değerler, klasik mantıktan ötürüdür. Klasik mantıkta bir şey ya totoloji (1) ya da çelişkidir (0). Ya doğru, ya da yanlış. Dolayısıyla klasik küme teorisinde bir eleman ya kümeye aittir ya da değildir; başka bir ara durum söz konusu değildir.

Bu durum, karakteristik fonksiyonun matematiksel olarak

$$\chi_A(x) : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

şeklinde ifade edilmesini sağlar.

$\forall x \in X$  için  $\chi_A(x) = 0$  ise  $x$  elemanı  $A$  kümesinin bir elemanı değildir.  $\chi_A(x) = 1$  ise  $x$  elemanı  $A$  kümesinin bir elemanıdır.

Eğer karakteristik fonksiyonun değer kümesi  $\{0, 1\}$  yerine  $[0, 1]$  aralığına genişletilirse, bir elemanın kümeye ait olma durumu dereceli olarak ifade edilebilir hale gelir. Bu genişletme sonucunda elde edilen fonksiyona “üyelik fonksiyonu”, bu fonksiyonla tanımlanan kümeye ise “fuzzy küme” adı verilir. Beklenildiği üzere fuzzy kümeler, klasik kümelerin çok daha fazlasını kapsayan bir yapıya sahiptir.

Bu durumda bir fuzzy kümenin üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) : X \longrightarrow [0, 1]$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\mu_A(x)$ ,  $x$  elemanının  $A$  fuzzy kümesine ait olma derecesini gösterir. Bu bakımdan klasik kümeler, üyelik fonksiyonlarının yalnızca 0 ve 1 değerlerini aldığı özel fuzzy kümeler olarak değerlendirilebilir.

Buradan itibaren  $\mu_A(x)$  üyelik fonksiyonunu hem klasik kümeler hem de fuzzy kümeler için kullanacak olursak, bir  $A$  klasik kümesi

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$$

şeklinde ifade edilirken, bunu üyelik fonksiyonu ile şu şekilde de gösterebiliriz:

$$A = \{(\mu_A(x), x) : x \in \mathbb{N}\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (0, x) : x \in \mathbb{N}, x \geq 4\}.$$

Burada  $(\mu_A(x), x)$  ile kastedilen,  $x$  nesnesinin  $A$  kümesine  $\mu_A(x)$  derecede ait olmasıdır. Küme klasik olduğundan, 1 ve 3 dahil olmak üzere, 1 ile 3 arasındaki doğal sayıların bu kümeye ait olma derecesi 1’dir; yani kesin olarak  $A$  kümesinin elemanıdır. Buna karşılık,  $A$  kümesine ait olmayan elemanların üyelik derecesi 0’dır.

Fakat bir  $B$  fuzzy kümesi tanımlayacak olursak, bu keskin sınırlar kısmen ortadan kalkar.

$$B = \{2\text{'ye yakın reel sayılar}\}$$

kümesini düşünelim. Artık alışageldiğimiz küme teorisi biraz daha farklılaşıyor. Herhangi bir sayının 2’ye yakın olup olmadığına nasıl karar verirsiniz? Ne derece yakınlıktan bahsediyoruz? 2.99 ya da 3.243 bu kümenin elemanı mı yoksa değil mi? İşte tüm bu soruların yanıtını verecek olan şey, “bu kümenin hangi üyelik fonksiyonuna sahip olduğu”dur. Çünkü hazır olun, aslında tüm reel sayılar artık bir derecede bu kümenin bir elemanı ve bir derecede de bu kümenin elemanı değil.

$$\mu_B(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [1, 2] \\ 3 - x, & x \in (2, 3] \\ 0, & \text{diğer } x\text{'ler} \end{cases}$$

üyelik fonksiyonuna bakalım.  $\mu_B(2) = 1$ . Yani 2’nin  $B$  kümesinin elemanı olduğu kesindir. Küme klasik olsaydı da 2’nin  $B$  kümesinde olacağını tahmin edebilirdik. 3’ten büyük reel sayılar için üyelik derecesinin 0 olduğu da açıkça görülmektedir. Bu da, klasik küme teorisinde olduğu gibi, 3’ten büyük reel sayıların bu kümenin elemanı olmaması anlamına gelir. Ve işte işin eğlenceli kısmı da 1 ile 3 arasındaki değerler için başlıyor. Örneğin  $(\mu_B(2.99), 2.99) = (0.01, 2.99)$  olup, 2.99 sayısı  $B$  kümesinin 0.01 derecede bir elemanıdır. Başka bir deyişle, bu sayı kümeye çok düşük bir derecede aittir. Görüldüğü üzere bazı değerler için kesin olarak eleman olmak ya da olmamaktan söz etmek mümkün değildir.

Fuzzy Küme Teorisi matematiğe çok büyük ve önemli bir bakış açısı katmıştır. Çünkü artık matematiğin “fuzzy (bulanık)” yaklaşımı, gerçek yaşamda “keskin” sınırlar nedeniyle ölçülemeyen pek çok durumu ölçmeye ve bu durumlara uygulanmaya olanak tanımaktadır.

Öyle ki eskiden mutlu olmak ya da olmamak varken, artık biraz mutlu olmayı ve biraz da mutsuz olmayı matematiksel olarak ifade etmek mümkün! Ne derler? Bir yerde hem var olup hem var olmamak pek de olası değildir. Oysa belki olduğunuz yer biraz da “fuzzy” dir.

## ■ Bir Fuzzy Kümenin Önemli Kavramları

Fuzzy kümelerin gerçek yaşam problemlerinde nerelerde ve nasıl kullanıldığını anlayabilmek için bazı temel kavram ve tanımlara değinmek gerekir. Şimdi bir fuzzy kümenin  $\alpha$ -kesimleri, desteği, çekirdeği ve yüksekliği kavramlarına bakalım.

$X$  evrensel kümesi üzerinde tanımlı  $A$  fuzzy kümesi verilsin.  $\alpha \in [0, 1]$  olmak üzere, üyelik değeri  $\alpha$  değerinden büyük veya eşit olan  $x \in X$  elemanlarının oluşturduğu kümeye,  $A$  fuzzy kümesinin  $\alpha$ -**kesimi** denir ve

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde, üyelik değeri  $\alpha$  değerinden **kesin** büyük olan  $x \in X$  elemanların oluşturduğu kümeye ise **A fuzzy kümesinin kesin  $\alpha$ -kesimi** denir ve

$$A_{\alpha+} = \{x : \mu_A(x) > \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımlar, fuzzy kümelerin en önemli kavramları arasındadır. Hem  $A_\alpha$  hem de  $A_{\alpha+}$  kümeleri keskin (klasik) kümelerdir ve  $\alpha$ -kesimleri fuzzy kümelerden klasik kümelere geçişi sağlar.

Üyelik derecesi sıfırdan büyük olan tüm elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin desteği** denir.  $Supp(A)$  veya  $S(A)$  ile gösterilir ve

$$Supp(A) = \{x : \mu_A(x) > 0\} = A_{0+}$$

şeklinde ifade edilir.

$$Core(A) = \{x : \mu_A(x) = 1\}$$

kümesine **A fuzzy kümesinin çekirdeği** denir. Çekirdek, ölçülen veya tanımlanan özelliği belirten kümenin “kesin ve tartışmasız” kısmını temsil eder. Yani bu, ilgili elemanın söz konusu özelliğe veya tanıma %100 uyduğu anlamına gelir. Bir bakıma, çekirdek kümedeki elemanlar fuzzy kümelerdeki belirsizliğin en az olduğu durumu temsil eder.

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

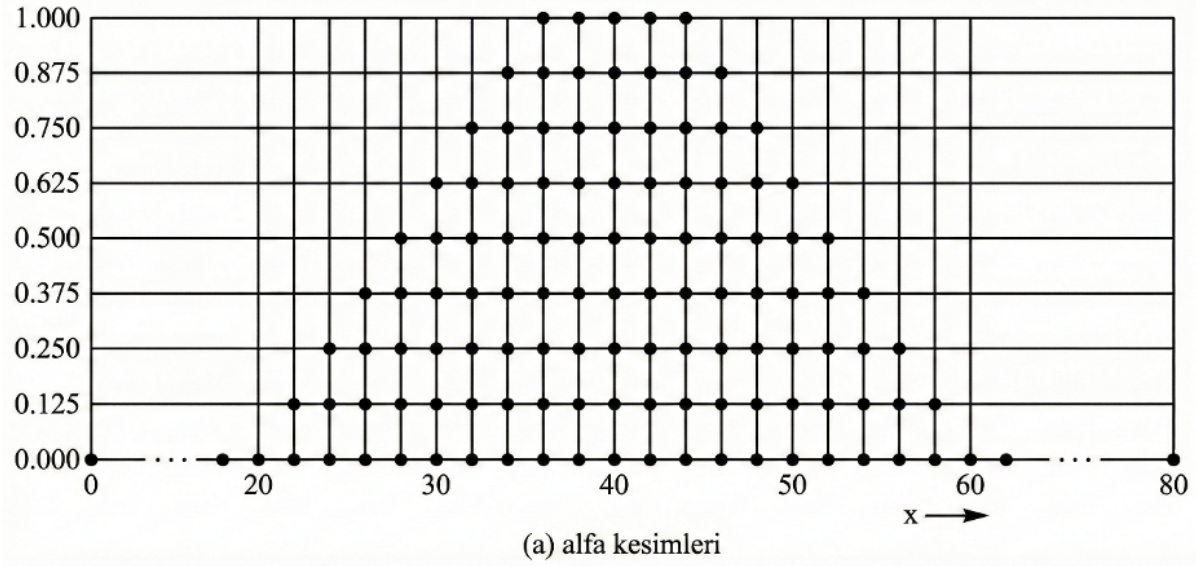
değerine **A fuzzy kümesinin yüksekliği** denir. Eğer  $h(A) = 1$  ise  $A$  fuzzy kümesine **normal fuzzy küme**,  $h(A) < 1$  ise **altnormal fuzzy küme** adı verilir.

## ■ Bir Fuzzy Kümenin Konveksliği

Bir fuzzy kümenin konveksliği, uygulamalarda ve fuzzy kümelerin aritmetik işlemlerinin tanımlı ve anlamlı olabilmesi açısından hayati öneme sahiptir.  $\mathbb{R}^n$  üzerinde tanımlı bir fuzzy kümenin konveksliği,

$$\forall \alpha \in (0, 1]$$

için  $\alpha$ -kesimlerinin her birinin konveks olması anlamına gelir. Bu kavramı daha iyi anlayabilmek için, aşağıda verilen  $\alpha$ -kesimlere bakmak faydalı olacaktır.



Şekil 1. "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications - George J. Klir - Bo Yuan, 1995."

$x$ -ekseni verileri,  $y$ -ekseni üyelik değerlerini belirtmek üzere, Şekil 1’de verilen  $\alpha$ -kesimlerinin kümesi, tek bir tepe (zirve) oluşturur; başka bir deyişle, her  $\alpha$  seviyesinde grafiği kestiğimizde tek parça bir aralık elde edilir. Bu anlamda konveksliğin geometrik yorumu bizim için oldukça önemlidir. Çünkü genellikle uygulamada konveks olmayan fuzzy kümelerle çalışmak anlamsızdır. Öyle ki, küme konveks değilse belirli bir  $\alpha$ -seviyesinde iki veya daha fazla ayrık aralık ve dolayısıyla birden fazla tepe (zirve) elde edilir. Bu durum ise birazdan vereceğimiz fuzzy sayı tanımına aykırıdır.

Reel sayılar üzerindeki fuzzy kümeler "uygulamada" kritik rol oynarlar. Bir  $A$  fuzzy kümesi, aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa “**fuzzy sayı**” olarak nitelendirilir ve bu sayede optimizasyon, yaklaşık çıkarımlar yapma ve kesin olmayan olasılıklarla çalışma gibi “belirsiz” gerçek hayat problemlerinde oldukça işe yarar.

$A, \mu_A(x): \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  üyelik fonksiyonuna sahip bir fuzzy küme olmak üzere

- i.  $A$  normal bir fuzzy kümedir,
- ii.  $\forall \alpha \in (0, 1]$  için  $A_\alpha$  kapalı bir aralıktır,
- iii.  $Supp(A)$  sınırlıdır.

Bu koşullar altında,  $A$  fuzzy kümesi bir **fuzzy sayı** olur.

Eğer küme konveks değilse, bu tanıma göre fuzzy sayı da olamayacağından, uygulamada konveks olmayan fuzzy kümelerle çalışmak anlamsızdır. Çünkü konveks olmayan kümeler fuzzy sayı olamayacağı için toplama ve çıkarma gibi işlemleri yapmayı karmaşıklaştırır. Özetle, sistem kararsızlaşır. Biz ise fuzzy sayılarla işlemler yaparak çıkarımlar üretmek ve gerçek hayat problemlerini yorumlamak istiyoruz. O halde şimdi biraz, fuzzy kümelerin ve fuzzy sayıların uygulamalarına değinelim.

Bir örnek üzerinden tüm bu tanımları daha iyi kavramak için endüstriyel soğutma sisteminde suyun ılıkliğini tanımlayan  $A$  fuzzy kümesini ele alalım.  $x$  değişkeni, suyun Celcius cinsinden sıcaklığını temsil etsin.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 10 \\ \frac{x - 10}{20 - 10} & 10 < x < 20 \\ 1 & 20 \leq x \leq 30 \\ \frac{50 - x}{50 - 30} & 30 < x < 50 \\ 0 & x \geq 50 \end{cases}$$

fonksiyonu  $A$  fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu olmak üzere,  $A$  fuzzy kümesinin çekirdeği  $Core(A) = [20, 30]$  aralığıdır. Bu aralık, suyun tartışmasız olarak ılık kabul edildiği kesinlik bölgesidir.  $Supp(A) = (10, 50)$  yani kümenin desteği ise  $(10, 50)$  aralığıdır. Bu, 10 derecenin altı kesinlikle soğuk, 50 derecenin üstü kesinlikle sıcak anlamına gelir. Eğer suyun en az %50 oranında ılık olduğu sıcaklık aralığını bulmak istersek burada  $\alpha = 0.5$  değeri için  $A_{0.5}$  kesimine bakmak gerekir.  $A_{0.5} = [15, 40]$  bulunacaktır. Daha önce belirtildiği üzere bu küme keskin bir kümedir ve belirli bir güven aralığındaki sıcaklık derecesini belirtir.  $A$  fuzzy kümesinin konveks olduğu da rahatlıkla görülebilir. Çünkü 20 derece ve 30 derece ılıksa, 25 derece daha az ılık olamaz.  $h(A) = 1$ 'dir çünkü üyelik fonksiyonu 20 ile 30 derece dahil olmak üzere bu aralıkta 1 değerini alır. Böylelikle  $A$  fuzzy kümesi normal bir fuzzy küme olduğundan, her bir  $\alpha$ -kesimi kapalı aralık olduğundan ve  $Supp(A)$  sınırlı olduğundan bir fuzzy sayı olur.

## ■ Fuzzy Kümeler ve Gerçek Yaşam

Birçok teorik bilgi ve tanımdan sonra artık nihayet fuzzy kümelerin hayatımızda nelere dokunduğuna ve neleri değiştirdiğine değinmenin vakti geldi. Yüzyıllar boyunca matematik, yalnızca “kesin” ve “net” olanın bilimi olarak görülmüştür. Elbette optimizasyon, olasılık teorisi gibi alt dallarda yaklaşımlar ya da tahminler hep söz konusuydu. Fakat çoğu sistem hâlâ klasik kümelerle işliyordu. Bu da, “kısmen”, “biraz”, “oldukça” gibi ifadelerin matematikte tam karşılığını bulamaması anlamına geliyordu.

Oysa matematik, insanlığın temel bilimlerinden biri ise, insani duyguları ve insani eylemleri de ifade edebilmeliydi. Nitekim öyle de oldu. 1965 yılında Prof. Dr. Lotfi A. Zadeh'in “Fuzzy (Bulanık)” kavramını ortaya atması, matematikte bir dönüm noktasıydı. Bugün, makinelerin “insan gibi düşünebilmesinin” temelinde bile hayati bir rol oynuyor Fuzzy Matematik. Örneğin 1980'lerin sonunda geliştirilen Japon metrosu Sendai'de, trenin hızını ve duruşunu kontrol etmek için fuzzy mantık ve fuzzy sistemler kullanılır. Öyle ki, trende yolculuk yapan insanların tren kalkış ve duruşlarında hiçbir yere tutunmadan seyahat edebilmesi mümkündür. Çünkü tren, istasyona ‘az’ mesafe kaldıysa, hız ‘biraz’ yüksekse gibi fuzzy ifadeleri algılama, bu verileri fuzzy sistemler kullanarak yorumlama mantığı üzerine çalışmaktadır. Bu sayede hem ani gaz ve fren gibi enerji verimliliğini düşüren manevralar yapmaz hem de konforlu bir yolculuk sağlamış olur.

Ve nihayetinde, fuzzy matematik yalnızca makinelerin düşünebilmesini sağlamakla kalmaz, aynı zamanda insan duygu ve düşüncelerini de matematiksel olarak ifade etmeye olanak sağlar. Çünkü her şeyin ve herkesin içinde “biraz iyilik” ve “biraz da kötülük” yok mudur? Aslında hayattaki çoğu şey “fuzzy” değil midir? Hayatımızdaki insanların iyi mi yoksa kötü mü, dürüst mü yoksa yalancı mı olduğuna karar verirken dahi aslında farkında olmadan kendi kriterlerimizin  $\alpha$ - kesimlerini kullanırız. Bu düşüncenin arkasında da matematiğin psikolojiye uygulanması yatar. Günümüzde çözdüğümüz kişilik testlerinde, ruh halimizi ve hislerimizi belirlemede bile fuzzy kümeler rol oynar. Bir kavramın, bir teorinin bir bilimi ve hatta diğer bilimleri ne kadar geliştirebileceğinin en keskin örneklerinden biridir bu.

## ■ Kaynaklar

- [1] George J. Klir, Bo Yuan; Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, 1995.
- [2] Prof. Dr. İ. Burhan Türkşen; Dereceli (Bulanık) Sistem Modelleri, 1. Baskı, Ekim 2015.