

Doğruyu Ararken Yanılgılarla Karşılaşmak: Analizde Karşı Örnekler I

EYLEM ÖZTÜRK

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ eozturk@hacettepe.edu.tr



Matematik, doğası gereği doğruyu arayan bir bilimdir. Çoğu zaman “Bu ifade gerçekten doğru mu?” sorusu etrafında şekillenir. Doğru olduğunu düşündüğümüz bir önermeyi ispatlamak, matematiğin en temel hedeflerinden biridir. Ancak en az ispatlar kadar güçlü ve öğretici bir araç daha vardır: karşı örnekler.

Bu kavram, bir önermenin hükmünü tek bir durum üzerinden geçersiz kılan yapıdır. Bazen uzun süren tartışmalarla savunulan bir teoremin hatalı olduğunu, tek bir karşı örnek açıkça gösterebilir. Bu durum, matematikte kesinlik kavramının ne kadar hassas olduğunu da ortaya koyar. Karşı örnekler, yanlış genellemeleri yıkmanın, fazla geniş önermeleri daraltmanın ve yeni doğrulara ulaşmanın en etkili yollarından biridir. Weierstrass’ın hiçbir yerde türevlenemeyen fakat her yerde sürekli olan ünlü fonksiyonu, buna çarpıcı bir örnektir; yalnızca bir yanlış ortaya koymakla kalmamış, fonksiyonlar teorisinde yeni bir bakış açısı kazandırmıştır.

Bu tür örnekleri bulmak ilk başta öğrenciler için oldukça zorlayıcı olabilir. Bir önermenin yanlış olduğunu tek bir karşı örnekle gösterebileceklerini duyduklarında, bazı öğrenciler doğru bir önermeyi de tek bir örnekle “ispatlayabileceklerini” düşünürler. Her ne kadar yalnızca örnekler vererek bir teoremin ispatlanamayacağını bilseler de, bazı öğrencilerin tek bir karşı örneğin bir önermeyi geçersiz kıldığını kabullenmeleri kolay değildir. Bazı öğrenciler ise karşı örneği yalnızca “istisnai” bir durum olarak görür ve bunun daha genel bir yapıyı temsil edebileceğini fark edemezler. Selden & Selden (1998)([6]) bu durumu şöyle ifade etmiştir:

Öğrenciler çoğu zaman tek bir karşı örneğin bir varsayımı çürüttüğünü göremez. Bu durum, karşı örneğin “var olan tek örnek” olarak algılanmasıyla meydana gelebilir; halbuki karşı örnek, daha genel bir durumu temsil eder.

Zamanla öğrenciler, karşı örneklerin önemini kavrar ve onları üretme sürecine ilgi duymaya başlarlar. Yanlış önermeleri çürütmek için karşı örneklerden yararlanmak, doğru ifadeleri sınamak açısından son derece etkili bir yöntemdir. Örneğin:

- Mevcut ifadeyi doğru hale getirmek için hangi değişiklikler yapılabilir?
- Bir karşı örneği değiştirip hala karşı örnek olarak kalmasını sağlayabilir misiniz?
- Karşı örneğinizin çürüttüğü başka önermeler düşünebilir misiniz?

Karşı örneklerin aranması matematik tarihinde önemli bir yer tutar. Bu duruma ilişkin üç ünlü örnekten bahsedeceğim.

İlk örnek, asal sayılarla ilgili tarihsel bir yanılgıya dayanır. Uzun yıllar boyunca matematikçiler yalnızca asal sayılar üretecek bir formül bulmaya çalıştılar. Bir dönem,

$$2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklindeki sayıların her zaman asal olduğuna inanılıyordu. Ancak Euler bu inancı çürüten bir karşı örnek buldu. $n = 5$ için bu sayının asal olmadığını gösterdi:

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Bu biçimdeki asal sayılara Fermat asalları denir ve hangi düzgün n -genlerin çizilebilir olduğunu belirlemede önemli bir rol oynarlar. (Bkz. örneğin, Aaboe (1975) s. 84, [1]).

Asal sayılarla ilgili bir başka varsayım ise hala ispatlanmayı ya da çürütülmeyi beklemektedir. Goldbach-Euler varsayımı, Christian Goldbach tarafından 1742’de Euler’e yazdığı bir mektupta ortaya atılmıştır ve aldatıcı derecede basit görünür: 2’den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamıdır. Örneğin, $12 = 5 + 7$, $20 = 3 + 17$ ve benzeri.

Güçlü bilgisayarlar, olası karşı örnekleri bulmak için kullanılmış ve $4, 6, \dots, 4 \times 10^{14}$ arasındaki sayılar içinde hiçbir karşı örnek bulunamamıştır (bkz. Richstein, 2000, [5]). 2000 yılında *Faber & Faber* adlı kitap yayınevi, bu varsayımı iki yıl içinde ispatlayacak ya da çürütecek kişiye 1 milyon dolarlık bir ödül vadetmiştir. Ancak ödül hala sahipsizdir.

19. yüzyılda büyük Alman matematikçi **Karl Weierstrass**, şu ifadeye karşı ünlü karşı örneklerini oluşturmuştur: “Eğer bir fonksiyon (a, b) aralığında sürekli ise, bu aralıkta bazı noktalarda türevlenebilir.”

Bu tür fonksiyonlara daha sonraki bölümde ayrıntılı olarak değineceğiz. Weierstrass, bu karşı örneklerini ilk olarak 1861 yılında verdiği derslerde göstermiş, ardından 1872’de bir makalede yayımlamıştır.

Onun örneği, matematikte sezgilerin ne kadar yanıltıcı olabileceğini açık biçimde ortaya koymuştur. Uzun süre “sürekli fonksiyonlar en azından bazı noktalarda türevlenebilir” düşüncesi doğru kabul edilmişti; oysa Weierstrass’ın örneği, her noktada sürekli ama hiçbir noktada türevlenemeyen bir fonksiyonun gerçekten var olabileceğini kanıtlamıştır. Weierstrass’ın ünlü örneği gibi büyük keşiflerin ışığında, daha temel düzeyde bir teoremin ispatını engelleyen kritik koşulları anlamamızı sağlayan Analiz’den birkaç çarpıcı karşı örneği ele alacağız.

■ Analiz’de Karşı Örnekler

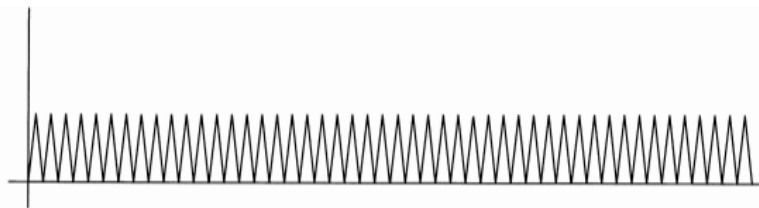
Örnek 1. Eğer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ise, en az bir noktada türevlenebilir.

Karşı Örnek. İlk olarak, Weierstrass tarafından ortaya konulan fonksiyonu inşa edeceğiz. Bunun için önce testere dişi fonksiyonu olarak bilinen $\sigma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım: k, m ve n harfleri tam sayıları göstermektedir:

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} x - 2n, & \text{eğer } 2n \leq x < 2n + 1, \\ 2n + 2 - x, & \text{eğer } 2n + 1 \leq x < 2n + 2, \end{cases}$$

σ_0 fonksiyonu 2-periyotludur, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $\sigma_0(x + 2m) = \sigma_0(x)$ eşitliği sağlanır. Şimdi de sıkıştırılmış testere dişi fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\sigma_k(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \sigma_0(4^k x).$$



Şekil 1. Testere dişi fonksiyonunun grafiği.

Bu fonksiyonun periyodu $T_k = \frac{2}{4^k}$ 'dir, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $\sigma_k(x + mT_k) = \sigma_k(x)$ eşitliği sağlanır. M -testine göre $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x)$ serisi bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır, ve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x)$$

fonksiyonu süreklidir. f fonksiyonunun hiçbir noktada türevlenebilir olmadığını iddia ediyoruz. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ alalım ve $\delta_n = \frac{1}{2 \cdot 4^n}$ olsun. $\delta_n \rightarrow 0$ iken aşağıdaki fonksiyonun limitinin olmadığını göstereceğiz:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x \pm \delta_n) - f(x)}{\delta_n} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x \pm \delta_n) - \sigma_k(x)}{\delta_n}$$

Yukarıdaki seri içinde $k > n$, $k = n$, $k < n$ olmak üzere üç tür terim vardır. Eğer $k > n$ ise δ_n sayısı σ_k fonksiyonunun periyodunun bir tamsayı katı olacaktır:

$$\delta_n = \frac{1}{2 \cdot 4^n} = 4^{k-(n+1)} \cdot \frac{2}{4^k} = 4^{k-(n+1)} \cdot T_k,$$

dolayısıyla $\sigma_k(x \pm \delta_n) - \sigma_k(x) = 0$ elde edilir. Böylece $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ serisi $n + 1$ terimin toplamına indirgenir:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sigma_n(x \pm \delta_n) - \sigma_n(x)}{\delta_n} + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(x \pm \delta_n) - \sigma_k(x)}{\delta_n} \quad (1)$$

$\sigma_0(x)$ fonksiyonunu kullanarak $\sigma_k(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\sigma_k(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^k (4^k x - 2n), & \text{eğer } \frac{n}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} + \frac{1}{4^k}, \\ \left(\frac{3}{4}\right)^k (2n + 2 - 4^k x), & \text{eğer } \frac{n}{2^{k-1}} + \frac{1}{4^k} \leq x < \frac{n+1}{2^{k-1}}. \end{cases}$$

Buradan açıktır ki $k = n$ olduğunda elde edilen σ_n fonksiyonunun $[x - \frac{1}{2 \cdot 4^n}, x]$ aralığında eğimi 3^n ve $[x, x + \frac{1}{2 \cdot 4^n}]$ aralığında eğimi -3^n olacaktır. Bu durumda (1) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim için aşağıdakiler elde edilir:

$$\left| \frac{\sigma_n(x \pm \delta_n) - \sigma_n(x)}{\delta_n} \right| = 3^n \quad (2)$$

Diğer taraftan $k < n$ olduğunda

$$\left| \frac{\sigma_k(x \pm \delta_n) - \sigma_k(x)}{\delta_n} \right| \leq 3^k \quad (3)$$

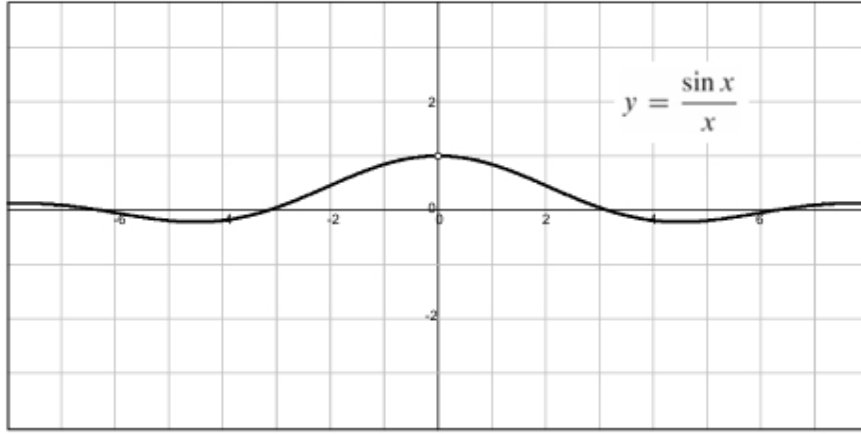
olduğu açıktır. (2) ve (3) değerlendirmelerini (1) eşitliğinde gözönüne alırsak:

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| \geq 3^n - (3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 1) = 3^n - \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

elde edilir. Buradan $\delta_n \rightarrow 0$ iken $\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| \rightarrow \infty$ olduğunu görürüz, bu da f fonksiyonunun hiçbir noktada türevlenebilir olmadığını söyler.

Örnek 2. Eğer $g(a) = 0$ ise, $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonu $x = a$ noktasında dikey asimptota sahiptir.

Karşı Örnek. $y = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında dikey asimptota sahip değildir.



Örnek 3. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de $x = a$ noktasında süreksiz ise, o halde $f(x)g(x)$ fonksiyonu da $x = a$ noktasında süreksizdir.

Karşı Örnek.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \neq g(0) = \frac{1}{2}.$$

Dolayısıyla hem f hem de g fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksizdir.

Buna karşılık çarpımları:

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

için

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1 = (f \cdot g)(0)$$

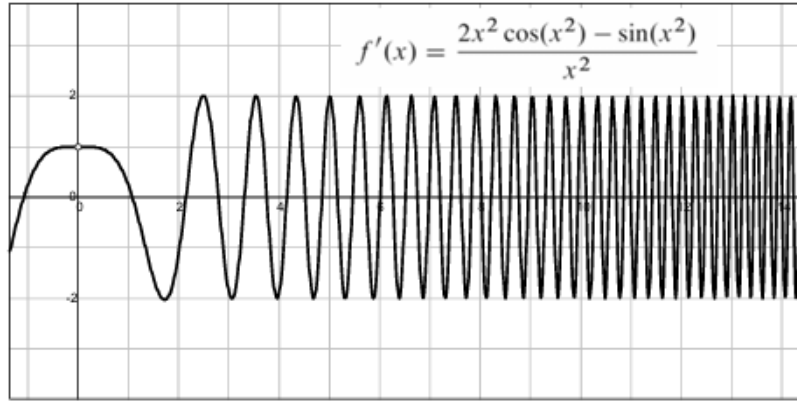
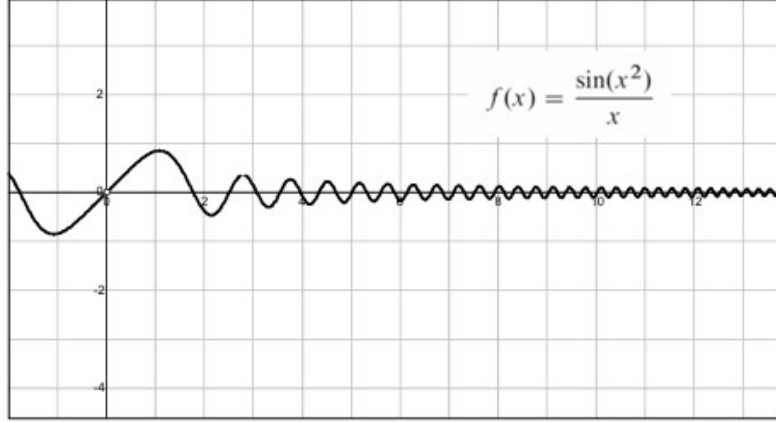
olduğundan, $f \cdot g$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında *sürekli*dir.

Örnek 4. $g(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında türevlenebilir değildir, ve $f(x)$ fonksiyonu da $x = g(a)$ noktasında türevlenebilir değildir. Bu durumda $F(x) = f(g(x))$ fonksiyonu da $x = f(g(a))$ noktasında türevlenebilir değildir.

Karşı Örnek. $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevlenebilir değildir. $f(x) = 2x + |x|$ fonksiyonu da $x = g(0)$ noktasında türevlenebilir değildir. Buna karşın $F(x) = f(g(x)) = x$ fonksiyonu $x = f(g(0)) = 0$ noktasında türevlenebilirdir.

Örnek 5. $f(x)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında türevlenebilir ve $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ vardır. Bu durumda $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ vardır.

Karşı Örnek. $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında türevlenebilirdir ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x}$ vardır. Ancak $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2}$ yoktur.



Örnek 6. Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi $x = a$ noktasında pozitifse, o zaman $x = a$ etrafında bir komşulukta fonksiyon artandır.

Karşı Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

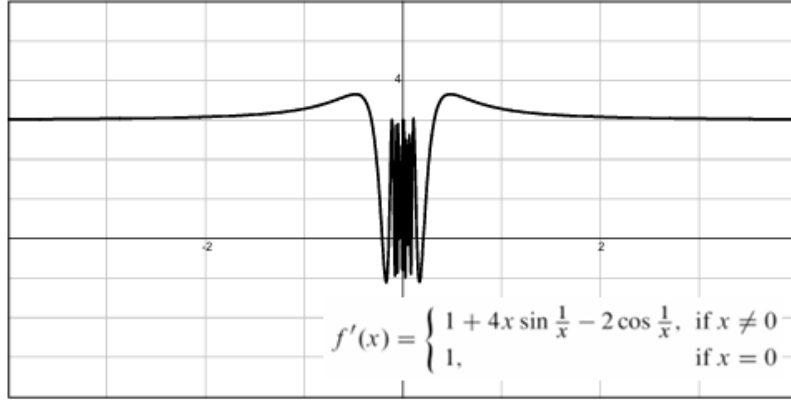
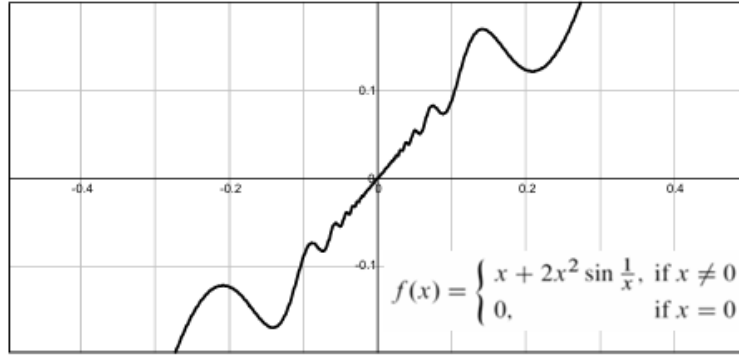
şeklinde tanımlansın.

Bu fonksiyonun türevi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

Burada $f'(0) = 1 > 0$ olduğundan türev $x = 0$ noktasında pozitifdir. Ancak, türev $x = 0$ civarındaki her komşulukta hem pozitif hem de negatif değerler almaktadır. Bu da, $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktası çevresinde hiçbir komşulukta monoton olmadığını göstermektedir.



Örnek 7. Eğer $f(x)$ fonksiyonu her $x \in [a, b]$ için tanımlı ve

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

varsa, o zaman

$$\int_a^b f(x) dx$$

da vardır.

Karşı Örnek: Dirichlet fonksiyonunu kullanalım:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise,} \\ -1, & x \text{ irrasyonel ise.} \end{cases}$$

Burada

$$|f(x)| = 1$$

olduğundan

$$\int_a^b |f(x)| dx = b - a.$$

Fakat

$$\int_a^b f(x) dx$$

mevcut değildir.

Bunu belirli integralin tanımını kullanarak gösterelim. $[a, b]$ kapalı aralığını alalım. Bu aralığı n alt aralığa

bölelim ve Riemann toplamlarının limitine bakalım:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i.$$

Burada her alt aralıktan seçilen c_i noktası rasyonel veya irrasyonel olabilir. Eğer tüm c_i 'ler rasyonel seçilirse, toplam

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_i = b - a$$

elde edilir. Eğer tüm c_i 'ler irrasyonel seçilirse, toplam

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (-1) \cdot \Delta x_i = -(b - a)$$

elde edilir. Rasyonel ve irrasyonel seçimler karıştırılırsa, toplam bu iki değerin arasında herhangi bir değer alabilir.

Dolayısıyla limit tek bir değere yaklaşmaz ve

$$\int_a^b f(x) dx$$

Riemann anlamında **mevcut değildir**.

Örnek 8. Eğer her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $b_n \leq a_n$ ve $\sum a_n$ yakınsak ise, o halde $\sum b_n$ serisi de yakınsaktır.

Karşı Örnek. $a_n = 0$, $b_n = -\frac{1}{n}$ için, her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $b_n \leq a_n$ ve $\sum a_n$ yakınsaktır, ancak $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ıraksaktır.

Örnek 9. Eğer her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $|b_n| \leq |a_n|$ ve $\sum a_n$ yakınsak ise, o halde $\sum b_n$ serisi de yakınsaktır.

Karşı Örnek. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ve $b_n = \frac{1}{n}$ alalım. Burada her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $|b_n| \leq |a_n|$ sağlanır ve $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ serisi (alterne harmonik seri) yakınsaktır. Ancak harmonik seri $\sum \frac{1}{n}$ ıraksaktır.

Örnek 10. $\int_a^\infty f(x) dx$ has olmayan integral yakınsak ise, $\int_a^\infty |f(x)| dx$ has olmayan inegral de yakınsaktır.

Karşı Örnek.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

integrali yakınsaktır, ancak

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

integrali ıraksaktır.

$$F(a) = \int_1^a \sin x dx.$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $F(a)$ fonksiyonu sınırlıdır ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Dirichlet kriterine göre

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

integrali yakınsaktır.

Diğer yandan,

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$$

Burada $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx$ integrali yakınsakken, $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx$ integrali ıraksaktır. Buradan $\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx$ integralinin ıraksaklığı, dolayısıyla da $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ integralinin ıraksaklığı elde edilir.

Bu yazıda, Analiz alanından seçilmiş dikkat çekici karşı örnekler aracılığıyla matematikte ispatın sınırlarını ve sezgilerin nasıl yanıltıcı olabileceğini inceledik.

Sonraki sayılarda, aynı yaklaşımı Cebir, Topoloji ve diğer temel matematik alanlarına da genişleterek, farklı konularda karşı örneklerin nasıl ortaya çıktığını ve düşünme biçimimizi nasıl zenginleştirdiğini göstermeye devam edeceğiz.

■ Kaynaklar

- [1] A. Aaboe, (1975) Episodes From the Early History of Mathematics. Wash ington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- [2] C. Boyer, (1991) A History of Mathematics. 2nd edition. Wiley.
- [3] C.C. Pugh, Real Mathematical Analysis. 2nd edition, Springer.
- [4] S. Klymchuk, (2004) Counter-Examples in Calculus. Maths Press, New Zealand.
- [5] J. Richstein, (2000) Verifying the Goldbach conjecture up to 4×10^{14} . Mathematics of Computation.70 (236), 1745–1749.
- [6] A. Selden, J.Selden, (1998) The role of examples in learning mathematics.