

Markov–Monte Carlo Stokastikliği ve Deterministik Model: Aynı Dinamiğin İki Yüzü

DERYA ALTINTAN

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ deryaaltintan@hacettepe.edu.tr



Doğadaki birçok süreç oldukça kalabalıktır. Örneğin, bir popülasyonda pek çok farklı tür bulunur ve popülasyonun dinamiklerini, bu türlerin birbirleriyle olan ilişkileri belirler; canlı organizmaların davranışları, sayısız molekülün birbirleriyle etkileşime girmesiyle şekillenir; bir mühendislik probleminde, birbirlerine bağlı çalışma modları ve olası arıza durumları vardır; bir biyokimyasal reaksiyon ağında, birçok farklı tür, birbirleriyle etkileşime girerek yeni türler oluşturur. Dolayısıyla hem hayatta hem de laboratuvar ortamı oldukça kalabalıktır. Türler, sınıflar ve durumlar üçlü beşli dizilir ve sistemlerin dinamiklerini bunların arasındaki ilişkiler belirler.

Biz çalışmamızda tüm bu sistemleri, A, B ile temsil edilen iki farklı türden oluşan bir sistem üzerinden inceleyeceğiz. Burada, A, B bir biyokimyasal süreç için iki farklı tür, bir popülasyon dinamiği için av–avcı gibi iki canlı organizma ya da bir mühendislik problemi için girdiler ve çıktılar olarak düşünülebilir. Söz konusu sistem, üzerine çalışılan süreçlerin özünü sadeleştirerek “bir halden diğerine geçiş” fikrini çok net ortaya koyan bir prototip olarak düşünülebilir.

Şimdi, G_1, G_2 ile gösterilen iki farklı geçişten oluşan bir sistemi düşünelim:

$$G_1 : A \xrightarrow{k_1} B, G_2 : B \xrightarrow{k_2} A. \quad (1)$$

Bu sistemi matematiksel olarak modellemenin iki farklı yolu vardır: (i)*deterministik modelleme* (ii)*stokastik modelleme*. Çok basit bir şekilde anlatmak gerekirse deterministik modelleme sürprizleri hiç sevmezken, stokastik modelleme tüm sürprizlere açıktır. Örneğin, konumu x ile gösterilen bir aracın t zamanına bağlı olarak yer değiştirme sürecini modelleyelim. Eğer, araç trafiksiz bir yolda sabit hızla gidiyorsa x deterministik olarak modellenenebilir. Bu, şu demektir, aracın ne zaman nerede olacağı her zaman bellidir. Dolayısıyla, süreç $x = f(t)$ şeklinde belirlenir. İstenilen bir t zamanında aracın konumu olan x , $f(t)$ fonksiyonuna ilgili t yerleştirilerek doğrudan elde edilebilir. Ama eğer araç yoğun bir trafikte sabit olmayan bir hızla gidiyorsa, aracın önüne çıkan bir engel, hızlanan veya yavaşlayan araç akışı gibi faktörler aracın gideceği yere ulaşma zamanını belirsiz hale getirecektir. Dolayısıyla, aracın bir t anındaki konumu hem zamana, hem de zamana bağlı rastgele süreçleri gösteren $\mathbb{P}(t)$ 'ye bağlıdır. Dolayısıyla, süreç $x = g(t, \mathbb{P}(t))$ şeklinde stokastik olarak modellenmelidir. Burada, $\mathbb{P}(t)$ tüm rastgele değişimleri modelleyen olasılık fonksiyonudur.

Şimdi, eq. (1) ile belirlenen kendi orijinal sistemimize geçebiliriz. Burada k_1 ve k_2 , A, B türlerinin birbirlerine dönüşümünü etkileyen tüm süreçler dikkate alınarak belirlenen pozitif sabitlerdir.

Bu sistemi deterministik olarak modellediğimizde, sistem dinamiklerini *kuralları belli ve öngörülebilir* kabul eder ve modeli G_1 ve G_2 geçişlerinin yönettiği bir yapı olarak ele alırız. G_1, A türünü girdi olarak alır; A 'nın miktarını $k_1 A$ oranında azaltırken, B 'yi aynı oranda artırır. Benzer olarak, G_2, B türünü girdi olarak kabul eder; B 'yi $k_2 B$ oranında azaltırken, A 'yı bu oranda artırır. Dolayısıyla, A ve B 'nin miktarlarının zaman içerisindeki değişimi

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A + k_2 B, \quad \frac{dB}{dt} = k_1 A - k_2 B, \quad (2)$$

şeklide verilen *adi diferansiyel denklem (ADD)* sistemi ile modellenir [7].

Deterministik modelleme, sistemin tamamen öngörülebilir olduğu varsayımıyla çalışır; oysa gerçek dünya çoğu zaman bu kadar pürüzsüz değildir. Molekül çarpışmaları, düzensiz trafik akışları veya beklenmedik çevresel etkiler, ele alınan sürecin dinamiklerinde anlık ve tahmin edilemeyen değişikliklere yol açabilir. Bu nedenle, incelenilen süreci sürekli ve düzgün bir akış olarak temsil eden deterministik modelleme çoğu durumda yetersiz kalır ve stokastik modelleme devreye girer. Stokastik modelleme de sistemin anlık durumu zamana bağlı bir *konum vektörü* ile gösterilir ve her bir geçişi tanımlayan iki temel yapı kullanılır. Bunlar *eğilim fonksiyonu* ve *net değişim vektörüdür*. Eğilim fonksiyonu, bir geçişin hangi sıklıkla gerçekleşmek istediğini gösterirken; net değişim vektörü, geçiş gerçekleştiğinde sistemin konum vektöründe meydana gelecek değişimin yönünü ve büyüklüğünü gösterir.

Bu kavramları eq. (1)’de verilen kendi sistemimiz üzerinden somutlaştıralım. Konum vektörümüzü

$$X(t) = (A(t), B(t))^T, X(t) \in \mathcal{X}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $A(t), B(t)$ sırasıyla A, B türlerinin $t > 0$ anındaki miktarlarını, $\mathcal{X}$ ise sistemin konum uzayını göstermektedir. Aşağıdaki tabloda, G_1 ve G_2 geçişleri, bu geçişlere karşılık gelen eğilim fonksiyonları ve net değişim vektörleri görülebilir:

Reaksiyon	Eğilim fonksiyonu	Net değişim vektörü
$G_1 : A \rightarrow B$	$a_1(X(t)) = k_1 A(t)$	$v_1 = (-1, 1)^T$
$G_2 : B \rightarrow A$	$a_2(X(t)) = k_2 B(t)$	$v_2 = (1, -1)^T$

Burada, örneğin, G_1 geçişini belirleyen, net değişim vektörü v_1 şöyle düşünülmelidir: konum vektörünün birinci bileşeni olan A, 1 birim kullanılıyor, dolayısıyla $v_1(1) = -1$, benzer olarak konum vektörünün ikinci bileşeni olan B, 1 birim üretiliyor, dolayısıyla $v_1(2) = 1$ sonuç olarak $v_1 = (-1, 1)^T$. Yani herhangi bir $G_k : nA + mB \rightarrow pA + qB$ geçişi için $v_k = (p - n, q - m)^T$ şeklinde belirlenecektir.

Stokastik modelleme, bu geçiş sistemlerini **Markov zincirlerini** kullanarak açıklar. Peki nedir bu Markov zinciri? Markov zinciri, gelecekteki durumları sadece mevcut durumlarına bağlı olan, dolayısıyla olasılık yapısı geçmiş bilgisine ihtiyaç duymayan “unutkan” ve “hafızasız” süreçleri modeller. Bu süreçler günlük hayatta sıklıkla karşımıza çıkar: yarın havanın nasıl olacağı bugünün hava durumuna bağlıdır; bir asansörün sonraki katta durup durmayacağı sadece bulunduğu mevcut kata bağlıdır; yürüyen bir canlı her adımda yalnızca bir önceki adımına bakarak sağa veya sola devam eder (random walk); internetin bağlı-kopuk olması durumları arasındaki geçişler de sadece mevcut durumuna bağlıdır [2, 6, 8, 9]. Matematiksel olarak Markov özelliği herhangi bir X süreci için, $\mathbb{P}(,)$ sistem dinamiklerini modelleyen olasılık fonksiyonunu göstermek üzere

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i^0, X_1 = i^1, X_2 = i^2, \dots, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla sürecin X_{n+1} ’deki durumu sadece mevcut durumu olan X_n ’e bağlıdır.

Şimdi eq. (1) ile verilen kendi modelimize dönebiliriz. Sistemimizde yaşanacak bir sonraki geçiş, sadece mevcut A ve B türlerinin miktarlarına bağlıdır. Bu Markov yapısını kullanan stokastik modellemeye göre eq. (1)’ile verilen sistemin konum vektörü *Rastgele Zamanlı Değişim Modelini (RZDM)* [1] sağlar. Ayrıca, sistemin olasılık fonksiyonunun zamana göre türevi *Temel Kimyasal Denklemi (TKD)* (Chemical Master Equation) adı verilen diferansiyel denklemi sağlar [3]. Dolayısıyla, deterministik modellemede sistem dinamiklerini incelemek için elimizde tek bir adi diferansiyel denklem varken, stokastik modelleme de RZDM ve TKD olacak şekilde iki denklem vardır.

RZDM’nin mantığı son derece basittir: Sistemin $t > 0$ anındaki konum vektörünü elde etmek için, sistemin başlangıçtaki konum vektörüne, $X(0)$, her bir geçiş kaç kere oluyorsa, karşılık gelen net değişim vektörünü o kadar ekle. Elimizde r tane geçişe sahip olan bir sistem olduğunu düşünelim. Bu sistemi modelleyen RZDM aşağıdaki şekildedir.

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^r \xi_k v_k,$$

burada ξ_k, G_k geçişinin kaç kere gerçekleşeceğini gösteren bir sayma sürecidir. Bu sayı, ortalaması eğilim fonksiyonunun zaman içindeki integraline bağlı bir *Poisson sürecidir*. Dolayısıyla sistemin konum vektörünün zamana göre değişimi, deterministik modellemede pürüzsüz bir eğri ile temsil edilirken, stokastik modellemede “*sıçramalı eğriler*” ile temsil edilir.

RZDM, sistemin konum vektörünün gerçekleştirebileceği tek bir yolu modellerken; TKD ise sistemin olası tüm geçişlerinin olasılıklarının zaman içinde nasıl değişeceğini modeller. Dolayısıyla, RZDM sistem için olası tek bir yol sunarken, TKD tüm yolların ihtimallerini veren bir diferansiyel denklem sunar. Bu nedenle teorik analizlerde TKD daha yaygın olarak kullanılır. Bu denklem, sistemin belirli bir durumda bulunma olasılığının zamana göre nasıl değiştiğini ifade eder. Sistemin mevcut durumdaki olasılığı: (i) diğer durumlardan mevcut duruma yapılan geçişlerle artarken (ii) mevcut durumdan başka durumlara yapılan geçişlerle azalır.

Elimizde r tane geçişe sahip, $X(t) = x$ konumunda olan bir sistem olduğunu ve $\mathbb{P}(x; t) = \mathbb{P}(X(t) = x)$ 'nin sistemin bir t anında x konumunda bulunması olasılığını gösteren fonksiyon olduğunu düşünürsek, sistemi modelleyen TKD aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(x; t) = \sum_{k=1}^r \left(a_k(x - v_k) \mathbb{P}(x - v_k; t) - a_k(x) \mathbb{P}(x; t) \right).$$

Burada her bir terim için $a_k(x - v_k) \mathbb{P}(x - v_k)$, $x - v_k$ konumundan x konumuna gelen *giriş* oranını; $a_k(x) \mathbb{P}(x)$ ise x durumundan başka konumlara *çıkış* oranını göstermektedir.

eq. (1) ile verilen sistem için $X(t) = (A(t), B(t))^T$ konum vektörünü kullanarak, her bir durum için

$$\mathbb{P}(A, B; t) := \mathbb{P}(A(t) = A, B(t) = B)$$

olasılıklarını tanımlayalım. Bu durumda sistemi modelleyen TKD,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{P}(A, B; t) = & k_1(A + 1) \mathbb{P}(A + 1, B - 1; t) - k_1 A \mathbb{P}(A, B; t) \\ & + k_2(B + 1) \mathbb{P}(A - 1, B + 1; t) - k_2 B \mathbb{P}(A, B; t) \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde yazılır. Burada, tanımsız durumlar için $\mathbb{P} = 0$ kabul edilir [11].

Şimdi, örnek olarak $A = \{0, 1\}$ ve $B = \{0, 1\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, sistemin konum uzayı $\mathcal{X}$ dört farklı elemandan oluşacaktır:

$$\mathcal{X} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\},$$

bu ise bize aşağıdaki TKD denklemini verir:

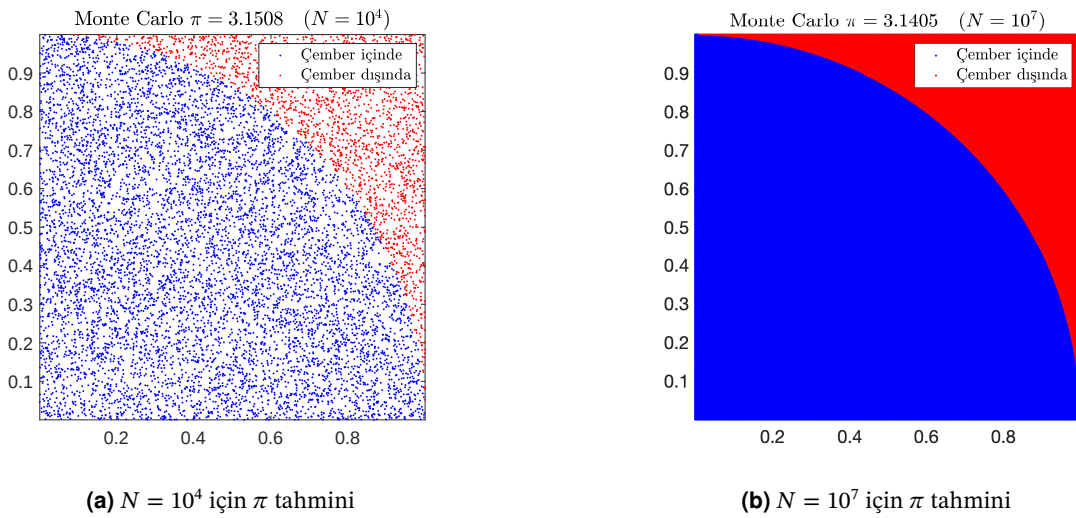
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{P}(0, 0; t) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \mathbb{P}(1, 0; t) &= k_2 \mathbb{P}(0, 1; t) - k_1 \mathbb{P}(1, 0; t), \\ \frac{d}{dt} \mathbb{P}(0, 1; t) &= k_1 \mathbb{P}(1, 0; t) - k_2 \mathbb{P}(0, 1; t), \\ \frac{d}{dt} \mathbb{P}(1, 1; t) &= -(k_1 + k_2) \mathbb{P}(1, 1; t). \end{aligned}$$

Daha genel bir durumda, $A = \{0, 1, \dots, n\}$, $B = \{0, 1, \dots, m\}$ olacak şekilde genişlerse, bu durumda olası konumlarını sayısı, yani $\mathcal{X}$ 'in eleman sayısı $(n + 1) \times (m + 1)$ olacaktır. Tür sayılarının ikiden fazla olabildiği, her bir türün miktarının yüzbinlerle hatta milyonlarla ifade edildiği gerçek sistemlerde bu denklemin boyutu o kadar büyük ki TKD'yi doğrudan çözmek neredeyse imkansız hale gelir.

Elimizde sistem dinamiklerini modelleyen TKD olduğunda sistemin konumunun zamana göre nasıl değiştiğini üretmek için Gillespie tarafından önerilen *stokastik simülasyon algoritmalarını* (SSA) kullanırız.

Bu algoritmalar, geçiş hızlarını belirleyen, eğilim fonksiyonlarını kullanarak geçişlerin hangi sırayla ve hangi zamanda gerçekleşeceğini modele ait olasılıkları kullanarak belirler ve böylece sistemin muhtemel bir yolunu çıkarır. Bu yöntem, temelinde olasılık kurallarına göre rastgele seçimler yapan bir Monte Carlo metodudur. Kısaca özetlemek gerekirse, olasılık dağılımlarından rastgele örnek çeken bir yöntemdir [4].

Monte Carlo yöntemi, aslında insanların hayatın her aşamasında kullandığı: *bir sonuca varmak için defalarca deneme prensibine* dayanır. Bu yöntem, analitik olarak çözümü oldukça zor olan karmaşık problemlerin çözümlerine, problemlerin tanımlandığı olasılık dağılımından çok sayıda rastgele örneklem alarak yaklaşır [5]. Örneğin, kenar uzunluğu 1 birim olan bir karenin içerisine, rastgele noktalar atıp bu noktaların ne kadarının birim çember içine düştüğünü sayarak π sayısını yaklaşık olarak hesaplayabiliriz [10]. Buradaki temel fikir, çember ve karenin alanları arasındaki bağlantının doğrudan π sayısına bağlı olmasıdır. Rastgele seçilerek koyulan noktalar arttıkça, π sayısı için daha doğru bir yaklaşım elde edilecektir. Örneğin, nokta sayısı $N = 10^4$ iken $\pi \approx 3.1508$ olarak elde edilir (bkz. fig. 1a), $N = 10^7$ için ise $\pi \approx 3.1405$ olarak bulunur (bkz. fig. 1b).



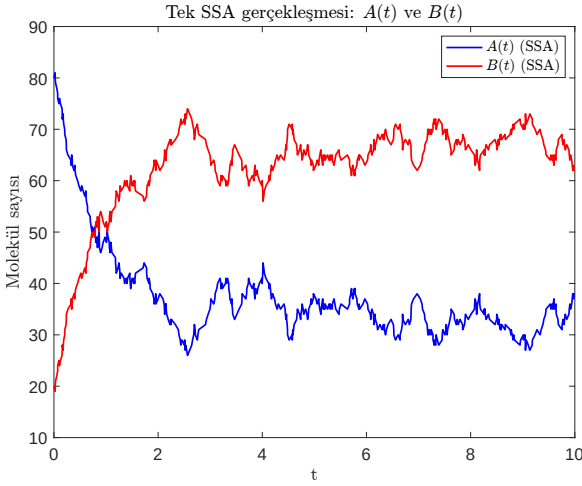
Şekil 1. Farklı örneklem sayıları için Monte Carlo yöntemi kullanılarak elde edilen π tahminleri.

Gillespie'nin SSA'larını, Markov süreçleri ile modellenen bir sistemde, gerçekleşecek olayları, rastgele seçen bir karar mekanizması olarak düşünebiliriz. Bu seçimler, elbette belli kurallar dahilinde gerçekleşir. SSA'lara göre, gerçekleşecek her olayın bir gerçekleşme olasılığı vardır. Bu olasılık daha yüksekse olay daha hızlı yani sık gerçekleşir.

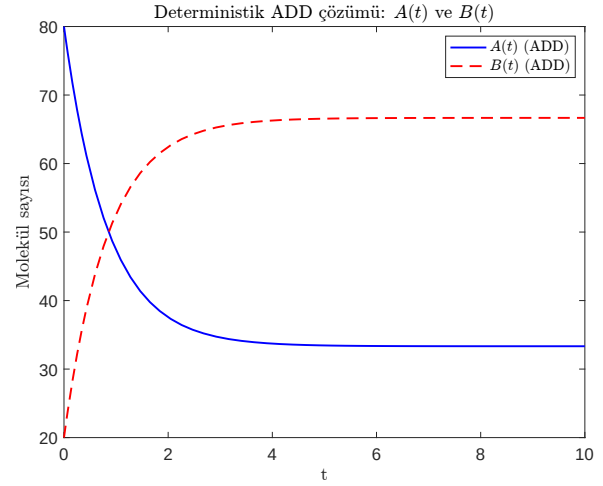
Şimdi eq. (1)'de verilen sistemin dinamiklerine dönebiliriz. Bu sistemde yer alan G_1 , G_2 geçişlerinin gerçekleşme olasılıkları eğilim fonksiyonları kullanarak belirlenir. SSA'lar her adımda iki karar verir: (1) bir sonraki geçiş ne zaman olacak? (2) hangi geçiş gerçekleşecek?. Gerçekleşen geçişin net değişim vektörü kullanarak sistemin konum vektörleri güncellenir. Bu kararlar tamamen olasılık kurallarına göre verilir. Dolayısıyla, Gillespie'nin SSA'ları aslında sistem dinamiklerini *hangi geçiş, ne zaman* sorularını rastgele seçimlerle cevaplayarak çözen bir Monte Carlo metodudur [4]. SSA algoritmaları, her bir simülasyonlarında TKD'yi kullanarak üzerinde çalışılan sistemin olası bir gerçekleşmesini (yolunu) verir.

Şimdi, eq. (1)'de verilen sistemin dinamiklerini stokastik ve deterministik modelleme yoluyla inceleyebiliriz. Sistem dinamiklerini, stokastik modellemede, eq. (3)'ün olası bir gerçekleşmesini SSA algoritmalarıyla üreterek; deterministik modellemede ise eq. (2)'de verilen ADD denkleminin çözümünü kullanarak inceleyeceğiz. SSA algoritmasının ürettiği olası bir gerçekleşmede A , B türlerinin zamana bağlı davranışları sıçramalı ve düzensiz bir yol izlerken (bkz. fig. 2a); ADD modelinin çözümü ile elde edilen sistem dinamikleri daha sakın ve kesintisiz bir yol izlemektedir (bkz. fig. 2b).

Sistem dinamiklerini mikroskobik ölçütte inceleyen stokastik modelleme ile makroskobik ölçütte inceleyen deterministik modelleme birbirlerinden tümüyle de bağımsız değildirler. Üzerine çalışılan sistemde, stokas-



(a) Tek SSA gerçekleşmesi.



(b) ADD çözümü

Şekil 2. (a) eq. (3)'te verilen TKD'nin Gillespie'nin önerdiği SSA'lar ile elde edilen olası bir yolu (b) eq. (2) ile verilen deterministik ADD sisteminin çözümü. Stokastik modelde sistem dinamikleri sıçramalı ve gürültülü; deterministik modelde ise sistem dinamikleri pürüzsüz bir eğri şeklinde elde edilir.

tik modelleme ile elde edilen *tür miktarlarının ortalama değerlerinin* zamana göre değişimleri, deterministik modelleme ile elde edilen ADD denkleminde yaklaşık bir davranış gösterir. Hatta eğer eğilim fonksiyonları lineerse, yani her bir geçiş en fazla tek bir türden oluşan girdiye sahipse, bu durumda tür miktarlarının ortalamasının zamana göre türevlerini gösteren ADD, deterministik modelleme yoluyla elde edilen ADD ile tam olarak çakışır.

Bu durumu eq. (1) üzerinden inceleyelim. Ortalama tür sayılarını,

$$\bar{A}(t) := \mathbb{E}[A(t)] = \sum_{A,B} A \mathbb{P}(A, B; t), \quad \bar{B}(t) := \mathbb{E}[B(t)] = \sum_{A,B} B \mathbb{P}(A, B; t)$$

şeklinde gösterelim.

Ortalama tür sayıları için diferansiyel denklemler: Önce $\bar{A}(t)$ için:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{A}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{A,B} A \mathbb{P}(A, B; t) = \sum_{A,B} A \frac{d}{dt} \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= \sum_{A,B} A \left[k_1(A+1) \mathbb{P}(A+1, B-1; t) + k_2(B+1) \mathbb{P}(A-1, B+1; t) - (k_1 A + k_2 B) \mathbb{P}(A, B; t) \right]. \end{aligned}$$

Şimdi, ilk iki terimde, olasılık ifadelerini aynı indeksler üzerinden toplamak için basit bir indeks kaydırması yapacağız. Birinci terimde yer alan $\mathbb{P}(A+1, B-1; t)$ ifadesini yeni indekslerle yazmak üzere $A' = A+1$ ve $B' = B-1$ olarak tanımlayalım. Böylece bu terim $\mathbb{P}(A', B'; t)$ biçimine dönüşür. Benzer olarak, ikinci terimdeki $\mathbb{P}(A-1, B+1; t)$ terimi için $A' = A-1$ ve $B' = B+1$ olarak belirleyelim, bu terim de aynı şekilde $\mathbb{P}(A', B'; t)$ şeklinde yeniden yazılabilir. İndeks kaydırması yalnızca toplama değişkenlerinin adını değiştirdiği için toplamın değeri değişmez; bu nedenle toplamı yine A, B indeksleriyle ifade edeceğiz.

Bu indeks kaydırmalarını uyguladığımızda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{A}(t) &= \sum_{A,B} \left[-k_1 A + k_2 B \right] \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= -k_1 \sum_{A,B} A \mathbb{P}(A, B; t) + k_2 \sum_{A,B} B \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= -k_1 \bar{A}(t) + k_2 \bar{B}(t), \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{d}{dt}\bar{A}(t) = -k_1\bar{A}(t) + k_2\bar{B}(t). \quad (4)$$

Benzer şekilde $\bar{B}(t)$ için:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{B}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{A,B} B \mathbb{P}(A, B; t) = \sum_{A,B} B \frac{d}{dt} \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= \sum_{A,B} [k_1 A - k_2 B] \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= k_1 \bar{A}(t) - k_2 \bar{B}(t), \end{aligned}$$

yani

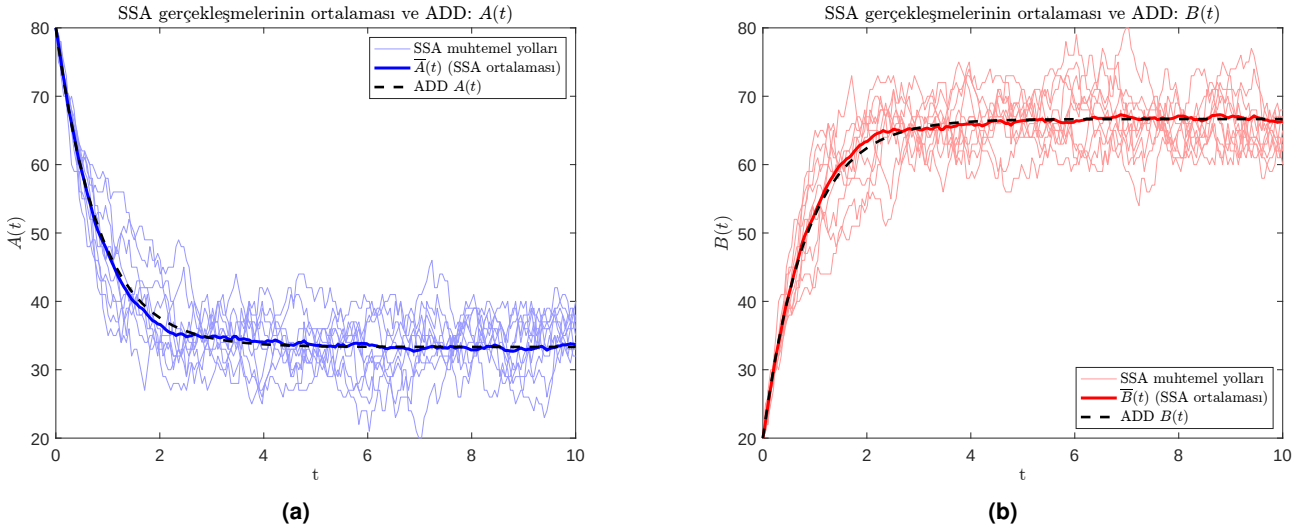
$$\frac{d}{dt}\bar{B}(t) = k_1\bar{A}(t) - k_2\bar{B}(t). \quad (5)$$

Deterministik ADD ile uyum

Deterministik modelde elde ettiğimiz, eq. (2) ile verilen ADD sisteminde eğer

$$\bar{A}(t) := E[A(t)], \quad \bar{B}(t) := E[B(t)]$$

şeklinde tanımlarsak, eq. (4) ve eq. (5) tam olarak eq. (2) ile çakışır. Yani bu basit örnekte, stokastik olarak modellenen tür miktarlarının ortalama değerlerinin zamana göre türevleri deterministik model ile elde edilen ADD denklemini sağlar ve “çok sayıda SSA gerçekleşmesinin ortalaması = ADD çözümü” gözlemini teorik olarak doğrular. Bu doğrulama aşağıdaki şekillerde net bir şekilde görülebilir.



Şekil 3. (a) Çoklu SSA simülasyonlarının ortalaması ile deterministik ADD çözümünün $A(t)$ üzerindeki karşılaştırması (b) aynı karşılaştırmının $B(t)$ için elde edilen sonucu. Her iki durumda da tekil SSA gerçekleştirmeleri stokastik ve sıramalı bir yapı sergilerken, bu gerçekleştirmelerin ortalaması deterministik ADD çözümüyle tam olarak çakışmaktadır. Bu sonuç, ADD denkleminin incelenen sistemin ortalama davranışını temsil ettiğini, SSA algoritmalarının ise tek bir stokastik rastgele örnek yolu ürettiğini açıkça göstermektedir.

Bu basit iki geçişli örnek, stokastik ve deterministik yaklaşımların aynı süreci iki farklı ölçekte nasıl yorumladığını açıkça göstermektedir. SSA algoritmaları süreçlerin rastlantısal yollarını ortaya koyarken, ADD modeli bu süreçlerin ortalama davranışını tanımlar. Böylece Markov–Monte Carlo stokastikliği ile ADD deterministikliği, aynı dinamiğin birbirini tamamlayan iki yüzü olarak ortaya çıkar. Bu iki bakış açısının birlikte ele alınması, karmaşık sistemlerin doğasını anlamak için güçlü ve bütüncül bir çerçeve sunar.

■ Kaynaklar

- [1] D. F. Anderson and T. G. Kurtz. Continuous time Markov chain models for chemical reaction networks. In *Design and analysis of biomolecular circuits: engineering approaches to systems and synthetic biology*, pages 3–42. Springer, 2011.
- [2] R. W. Darling and J. R. Norris. Differential equation approximations for Markov chains. 2008.
- [3] D. T. Gillespie. A rigorous derivation of the chemical master equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 188(1-3):404–425, 1992.
- [4] D. T. Gillespie. Stochastic simulation of chemical kinetics. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 58(1):35–55, 2007.
- [5] J. Hammersley. *Monte Carlo methods*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] V. G. Kulkarni. Modeling and analysis of stochastic systems, 2016.
- [7] J. D. Murray. *Mathematical biology: I. An introduction*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2007.
- [8] J. R. Norris. *Markov chains*. Number 2. Cambridge university press, 1998.
- [9] J. Smiesko, M. Kontsek, and K. Bachrata. Markov-modulated on–off processes in IP traffic modeling. *Mathematics*, 11(14):3089, 2023.
- [10] S. Strbac-Savic, A. Miletic, and H. Stefanović. The estimation of Pi using Monten Carlo technique with interactive animations. In *8th International Scientific Conference" Science and Higher Education in Function of Sustainable Development-SED*, volume 2015, 2015.
- [11] D. J. Wilkinson. *Stochastic modelling for systems biology*. Chapman and Hall/CRC, 2018.