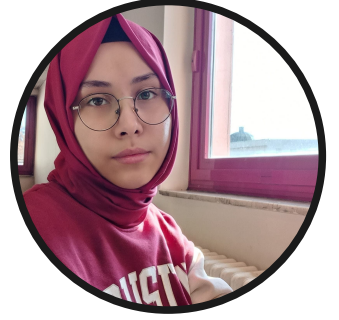


Fraktal Geometri Üzerine Bir İnceleme

KÜBRA ÇELİK

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü 3. Sınıf Öğrencisi

✉ k.celik@hacettepe.edu.tr



Yüzyıllardır matematiğin temelini oluşturan Öklid geometrisi; daire, küre ve kare gibi ideal şekiller üzerine kuruludur. Ancak bu kusursuz yapılar, doğanın karmaşık biçimlerini açıklamakta yetersiz kalır. Benoît Mandelbrot'un ünlü sözleriyle ifade edecek olursak: "Bulutlar küre, dağlar koni, kıyı şeritleri çember ve ağaç kabukları düz değildir; hatta ışık bile düz bir çizgide hareket etmez."

Gerçek dünyada karşılaştığımız pek çok yapı, parçalı ve ayrıntılı bir yapıya sahiptir. Bu tür şekilleri anlamak ve modellemek amacıyla geliştirilen yaklaşım Fraktal Geometri olarak adlandırılır.

Fraktal kelimesi, Latince "kırılmış" ya da "parçalanmış" anlamına gelen *fractus* sözcüğünden türetilmiştir. Matematiksel olarak fraktallar; farklı ölçeklerde benzer desenlerden oluşan (öz-benzerlik/self similarity), sonsuz ayrıntı içeren ve çoğu zaman tam sayı olmayan, yani kesirli boyutlarla tanımlanan geometrik yapılardır. Basit kuralların art arda tekrar edilmesiyle karmaşık şekillerin ortaya çıkması, fraktalların dikkat çekici özelliklerinden biridir.

Fraktal geometri modern anlamda 1970'li yıllarda Benoît Mandelbrot tarafından sistematik hâle getirilmiştir. Ancak George Cantor, Helge von Koch ve Waclaw Sierpiński gibi matematikçilerin yaptığı çalışmalarla 19. yüzyılda temelleri atılmıştır. Bu çalışmalar matematikçiler tarafından uzun süre alışılmadık, hatta "matematiksel canavarlar" olarak adlandırılmıştır. Mandelbrot ise bilgisayarların sunduğu görselleştirme imkânlarını kullanarak bu dağınık fikirleri bir araya getirmiş, bu yapılara "fraktal" adını vermiş ve fraktal geometriyi bağımsız bir araştırma alanı hâline dönüştürmüştür.

Şimdi birkaç fraktal örneğini inceleyelim.

■ Koch Kar Tanesi: Sonsuz Çevre, Sonlu Alan

Koch kar tanesi; İsveçli matematikçi Helge von Koch'un tanımladığı, fraktal geometrinin en klasik örneklerinden biridir. Bu yapı; alanı sonlu ancak çevresi sonsuz olan, birçok üçgenin kar tanesi formunda üst üste dizilmesiyle oluşan bir şekildir. Eşkenar bir üçgenin sürekli olarak uç kısımlarının, simetrik şekilde katlanmasıyla elde edilen şekil kar tanesini andırıldığından bu adı almıştır.

Şimdi Koch Kar Tanesinin adımlarını inceleyelim. Bir eşkenar üçgen alalım ve bu eşkenar üçgene temel kuralı uygulayalım.

Temel Kural:

1. Üçgenin her bir kenarı alınır. Bu kenarlar, üç eşit parçaya bölünür.
2. Orta parça taban kabul edilerek, dışa doğru bakan yeni bir eşkenar üçgen inşa edilir.
3. Ardından, bu orta parça (başlangıçtaki kenarların $1/3$ 'ü) silinir.

Tekrarlama:

Bu süreç, elde edilen yeni şeklin her bir doğru parçasına sonsuza kadar uygulanır.

Sonsuz Çevre:

Her bir adımda, şeklin çevre uzunluğu sabit olarak $\frac{4}{3}$ oranında artar. Eğer başlangıç çevresi P_0 ise, k . adımdaki çevre uzunluğu P_k formülü ile gösterilir:

$$P_k = P_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

Bu üssel artış, sonsuz sayıda adım için uygulandığında ($k \rightarrow \infty$) kar tanesinin uzunluğunun da sonsuza (∞) yaklaşması anlamına gelir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \infty$$

Sonlu Alan

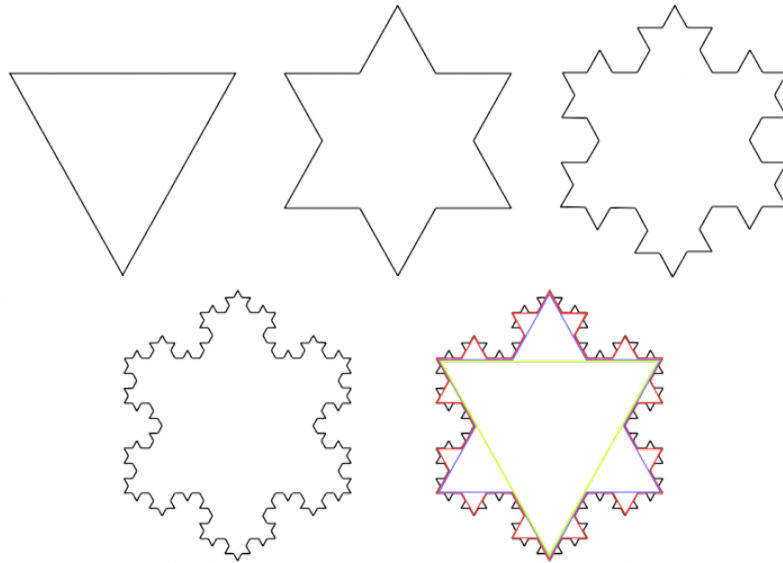
Toplam alan, başlangıç alanına sonsuza kadar eklenen küçük alanların toplamına eşittir. Bu toplam, bir geometrik seri oluşturur:

$$A_\infty = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Delta A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Serinin toplamını hesaplamak için ΔA_n ifadesini kullanırız. Bu, ilk terimi $a = A_0 \cdot \frac{1}{3}$ ve ortak oranı $r = \frac{4}{9}$ olan bir geometrik seridir. Toplamı $\sum = \frac{a}{1-r}$ formülü ile bulunur: **Toplam Alan:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta A_n = \frac{A_0 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{A_0 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = A_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = A_0 \cdot \frac{3}{5}$$

$$A_\infty = A_0 + A_0 \cdot \frac{3}{5} = A_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = A_0 \cdot \frac{8}{5}$$



■ Sierpinski Üçgeni:

Polonyalı matematikçi Wacław Sierpinski, daha sonraları kendi adıyla anılan Sierpinski Üçgeni fraktalını tanımladı. Sierpinski Üçgeni, içi dolu bir eşkenar üçgenin her adımda kendi içinden daha küçük boyutlu eşkenar üçgenlerin çıkarılmasıyla oluşur.

Temel Kural:

1. İçi dolu bir eşkenar üçgeni alınır.
2. Üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek bir üçgen oluşturulur ve ilk üçgenin içinden bu üçgen çıkarılır.

Artık elimizde kenar uzunluğu ilk eşkenar üçgenin kenarının yarı uzunluğunda 3 adet eşkenar üçgen kalmıştır.

Tekrarlama:

Bu işlem, kalan her yeni küçük üçgen için sonsuza kadar uygulanır.

Bu fraktal örneğindeki en dikkat çekici sonuç, temel kuralın sonsuz kez tekrarlanması durumunda alanın sıfıra yaklaşmasıdır. Her adımda alanın $1/4$ 'ü atıldığı için, k -ıncı adımda kalan alan $A_k = (\frac{3}{4})^k$ formülüyle hesaplanır. Adım sayısı sonsuza yaklaştıkça ($k \rightarrow \infty$) üçgenin alanı matematiksel olarak sıfıra yaklaşır.



■ Fraktal Boyut:

Klasik Öklid geometrisinde boyutlar tam sayılarla ifade edilir: Nokta 0, doğru 1, düzlem 2 ve küp 3 boyutludur. Ancak Felix Hausdorff ve Abram Besicovitch tam sayı olmayan boyutları öne sürerek matematikte devrim yaratmışlardır. Bu önerme; doğruların bir, karelerin iki boyutlu olduğunu kabul ederken, birçok karmaşık eğrinin içerdikleri bilgi miktarına göre değişen "ara" boyutlara (in-between dimensions) sahip olduğunu kanıtlamıştır. Bu tarz, tam sayı olmayan boyutlara günümüzde Hausdorff-Besicovitch boyutları denir.

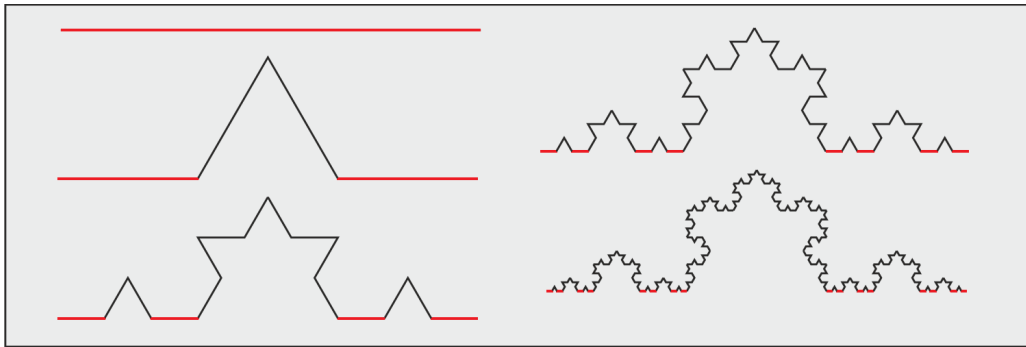
Mandelbrot, bu "ara boyut" tanımını kullanarak doğadaki düzensizlikleri araştırmış ve boyutla ilgili ilk çalışması İngiltere kıyılarının uzunluğunu merak etmesiyle başlamıştır. Bu çalışmalar sonucunda fraktal boyutu tanımlamıştır.



Boyutun Matematiksel Hesaplaması:

- Bir doğru parçasını 3 kat büyütürsek boyu 3 kat uzar, boyutu 1'dir.
- Bir kareyi 3 kat büyütürsek alanı 9 kat artar, boyutu 2'dir.
- Bir küpü 3 kat büyütürsek hacmi 27 kat artar, boyutu 3'tür.

Ancak fraktal bir yapıda durum farklıdır. Koch kar tanesinin oluşumunda kullanılan kural, yalnızca tek bir doğru parçasına uygulandığında ortaya çıkan fraktal yapıya Koch eğrisi adı verilir:



Koch eğrisinde bu durumu incelersek, iki nokta arasında sonsuz uzunlukta olmasıyla bir doğrunun ötesine taşarken, bir düzlemi tam olarak dolduramamaktadır. Bu nedenle boyutu 1 ile 2 arasında bir "ara değer" olmalıdır.

Mandelbrot'un tanımına göre fraktal boyut (D), ölçekleme çarpanı (s) ve oluşan yeni parça sayısı (N) arasındaki logaritmik ilişkidir:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(s)}$$

Koch Eğrisi Uygulaması

Koch eğrisinde ölçeği 3 kat büyüttüğümüzde ($s = 3$), yapı kendisini 4 yeni parça ($N = 4$) ile yineler.

$$4 = 3^D \Rightarrow D = \log_3(4) = \frac{\log(4)}{\log(3)}$$

Bu hesaplamanın sonucu olan $D \approx 1,262$, yapının bir çizgiden daha karmaşık ama bir yüzeyden daha az yoğun olduğunu matematiksel olarak göstermektedir.

Sierpinski Üçgeni Uygulaması

Sierpinski üçgeninde ölçekleme çarpanı 2 iken ($s = 2$), ortaya çıkan parça sayısı 3'tür ($N = 3$).

$$3 = 2^D \Rightarrow D = \frac{\log(3)}{\log(2)}$$

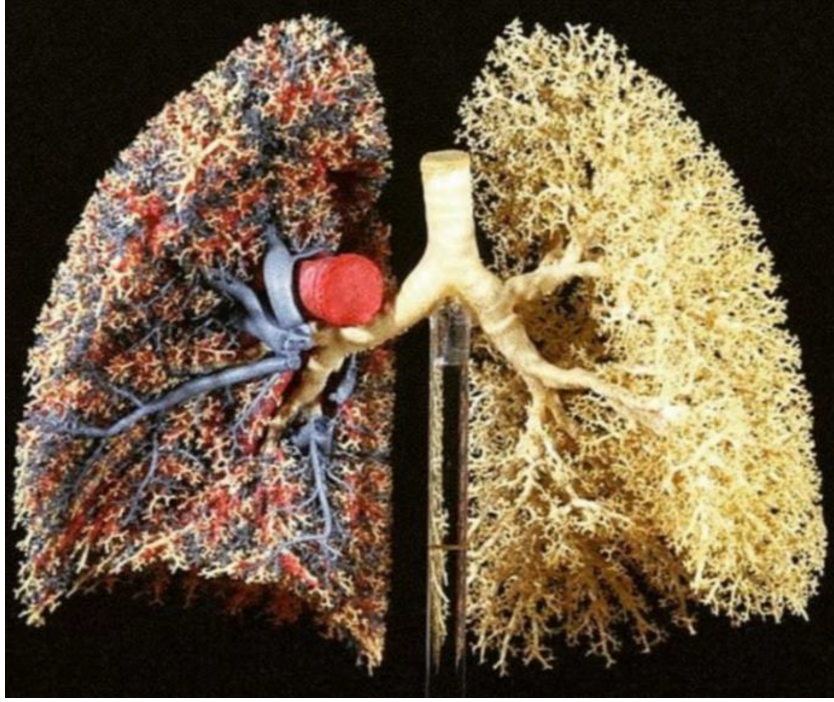
Bu hesaplamanın sonucu olan $D \approx 1,585$, Sierpinski Üçgeni'nin bir çizgiden ($D = 1$) çok daha yoğun olduğunu ancak bir düzlemi ($D = 2$) tamamen dolduramadığını gösterir. Bu "ara boyut", yapının sonsuz çevre uzunluğuna sahip olmasına rağmen alanının sıfıra yaklaşmasının matematiksel ifadesidir.

■ Doğadaki Uygulamaları:

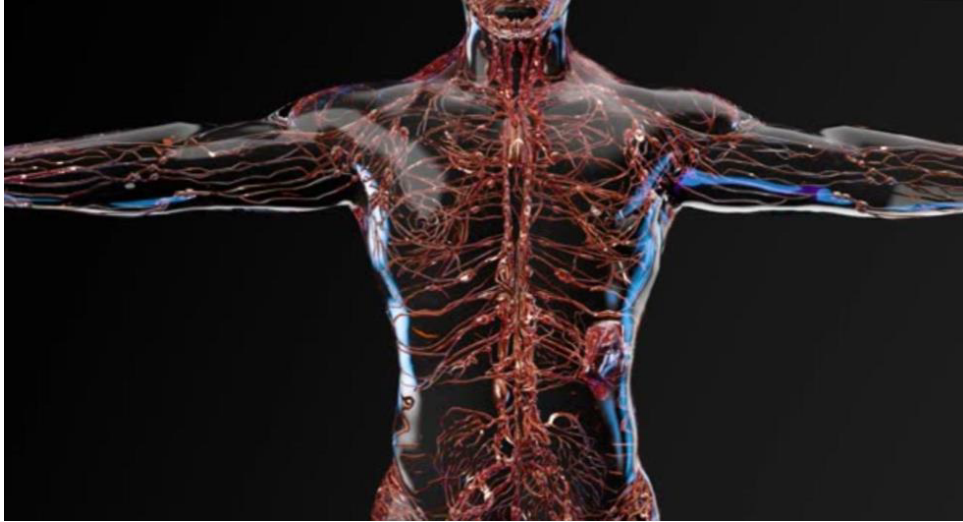
Romanesco Karnabaharı: Doğadaki fraktal örneklerinden biridir. Spiral şeklindeki yeşil konilerin farklı boyutlarda birbirini tekrar etmesiyle şekillenir. Karnabaharın bir parçasına yakından bakıldığında tüm karnabardaki desenin aynısı görülür.



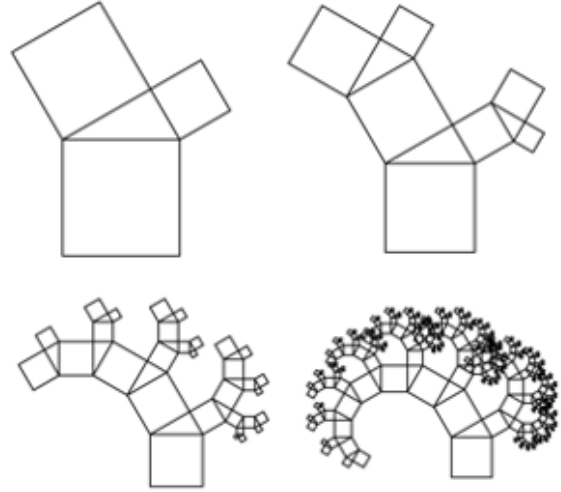
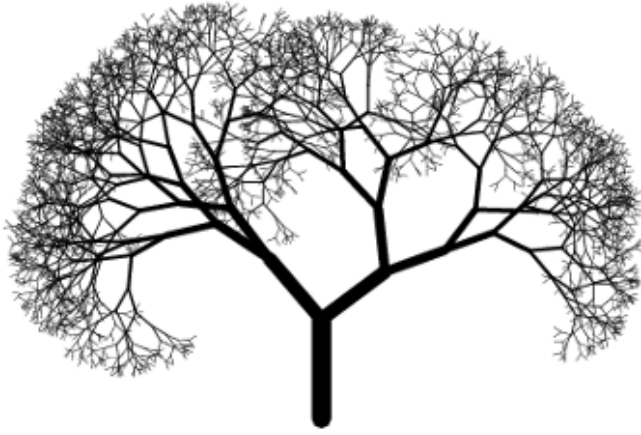
Akciğer: İnsan vücudundaki fraktal örneklerden biridir. Bu sistem, giderek incelen ve sürekli dallanan tüplerden oluşur. Solunan hava, bu dallanmış yapı boyunca ilerleyerek en uçta yer alan mikroskobik hava keseciklerine, yani alveollere ulaşır. Alveoller, gözeneklerin son derece küçültülmüş hâllerini andırır. Yapının bu özelliği, yüzey alanını maksimuma çıkararak gaz alışverişinin son derece verimli gerçekleşmesini sağlar. Öyle ki birkaç tenis kortu büyüklüğündeki yüzey alanı, birkaç tenis topu hacmindeki bir alana sığar. Bu devasa yüzey alanı, vücudun yeterli miktarda oksijen alabilmesi için hayati bir avantaj sağlar.



Kan Damarları: İnsan vücudundaki bir diğer fraktal örneğidir. Bu sayede, vücudun yalnızca yaklaşık %5'lik bir hacmini kaplamalarına rağmen, kanı vücudun en ücra köşelerine kadar ulaştırabilirler. Bronşlara ait tüplere benzer biçimde, kan damarları da giderek daha küçük dallanmalara ayrılan bir yapılanma görülür. Atardamarlar, aort ile başlar ve ilerledikçe daha küçük damarlara ayrılır. Bu dallanma süreci, kılcal damarlar ile devam eder ve birbirine çok yakın, yoğun bir ağ yapısı oluşturarak son bulur. Bu özelliği sayesinde kan damarları, fraktal saçaklara benzer bir yapı olarak ifade edilir.

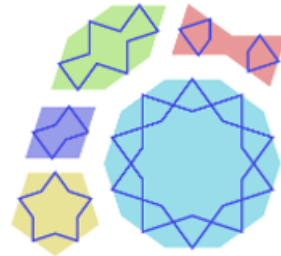
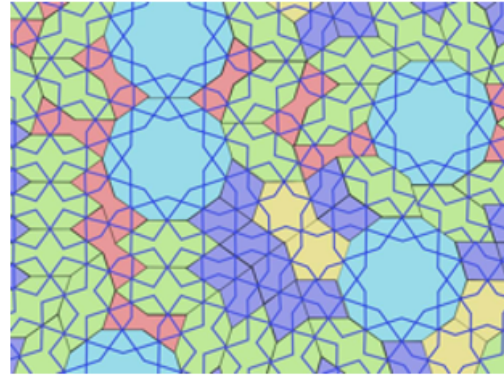


Pisagor Ağacı: Fraktal geometrinin en bilinen yapılarından biri olan Pisagor Ağacı, "fraktal gölgelik" olarak da adlandırılır. Bu yapı, doğruların belirli kurallara göre ayrılması esasına dayanır ve doğadaki dallanma süreçlerine görsel olarak oldukça benzer bir düzen sergiler. İnşa sürecinde doğrular yerine kareler ve üçgenler kullanılır; her adımda bu geometrik şekiller belirli oranlarla çoğaltılarak karmaşık fakat düzenli bir yapı elde edilir. Bu yinelemeli süreç sonucunda kendine benzerlik özelliği taşıyan fraktal bir oluşum ortaya çıkar.



Kendine benzeyen (öz-benzer) fraktal yapılar yalnızca doğada değil, İslam mimarisinde kullanılan geometrik süslemelerde de görülmektedir. Özellikle girih desenlerinde, aynı geometrik şekillerin farklı ölçeklerde tekrarlanması, büyük desenlerin daha küçük benzer parçalara bölünmesiyle sağlanır. Bu yapı, fraktal geometrinin temel kavramlarından biri olan öz-benzerlik ilkesine karşılık gelmektedir.

Harvard Üniversitesi'nden Peter J. Lu ve Paul J. Steinhardt'ın çalışması, bu desenlerin yalnızca estetik amaçlarla değil, bilinçli bir geometrik sistemle üretildiğini ortaya koymuştur. Topkapı Sarayı'nda bulunan 15. Yüzyıla ait Topkapı Parşömeni, İslam mimarlarının ongen, beşgen ve altıgen gibi çokgenlerden oluşan bir girih karo sistemi kullandığını göstermektedir.



■ Atomik Ölçekte Fraktal Düzen: Kuazikristallerin Keşfi

Uzun yıllar boyunca kristaller, atomların uzayda periyodik ve düzenli biçimde tekrarlandığı yapılar olarak tanımlanmıştır. Bu anlayışa göre yalnızca belirli simetri türlerine izin veriliyor, beşli simetri gibi klasik kristalografiye uymayan düzenlerin doğada var olamayacağı kabul ediliyordu. Matematiksel açıdan ilgi çekici olsalar da, bu tür yapıların fiziksel dünyada bir karşılığı olmadığı düşünülüyordu.

Bu yerleşik görüş, 1982 yılında Daniel Shechtman'ın klasik kristal tanımlarına uymayan bir atomik düzeni gözlemlemesiyle sarsıldı. İncelenen yapı ne tamamen düzensizdi ne de bilinen kristaller gibi periyodikti; buna rağmen açık ve kararlı bir düzen sergiliyordu. Daha sonra kuazikristaller olarak adlandırılan bu yapılar, düzen ile düzensizlik arasında yer alan sıra dışı bir geometriye sahipti. O dönemde henüz farkında olunmasa da, bu yapı fraktal geometrinin temel kavramlarından biri olan ölçekten bağımsız düzen fikriyle güçlü bir benzerlik taşıyordu. Ancak bu bulgular, yerleşik kabullere aykırı olduğu...

...gereğesiyle başlangıçta bilim dünyasında sert eleştirilerle karşılandı; Shechtman'ın çalışmaları ciddiye alınmadı, kendisine konuyu yeniden öğrenmesi tavsiye edildi ve bir süre sonra içinde bulunduğu araştırma grubundan ayrılmak zorunda kaldı.

Yaşanan tüm bu olumsuzluklara rağmen Shechtman çalışmalarından vazgeçmedi. Bulgularını farklı kristalografılarla paylaşmaya devam etti ve destek arayışını sürdürdü. Bu süreçte temas kurduğu bilim insanları arasında, matematiksel desenler üzerine çalışan araştırmacılar da bulunuyordu. Bu temaslar, dikkatlerin matematikçi Roger Penrose'un geliştirdiği kendini tekrar etmeyen mozaik desenlerine yönelmesine zemin hazırladı. Penrose mozaiklerinin incelenmesi, araştırmacıların Orta Çağ İslam mimarisinde kullanılan girih desenlerini yeniden değerlendirmesine yol açtı. Girih desenlerinin, Penrose mozaiklerine benzer biçimde periyodik olmayan ancak yüksek derecede düzenli geometrik yapılardan oluştuğu fark edilmiş; yapılan çalışmalar, bu desenlerin yarı kristal düzenlerle aynı matematiksel prensipleri barındırdığını ortaya koymuştur.

Kristalograf Alan Mackay, Penrose'un çalışmaları ve bu çalışmalar ışığında yeniden değerlendirilen İslam mimarisi desenlerinden yola çıkarak, benzer bir düzenin atomik ölçekte de mümkün olup olamayacağını sorguladı. Mackay, maddelerin yapı taşları olan atomların, tıpkı bu mozaikler gibi kendini tekrar etmeyen ancak düzenli dizilimler oluşturabileceğini öne sürdü. Bu fikri sınamak amacıyla Penrose mozaiklerindeki kesişim noktalarına atomları temsil eden noktalar yerleştirdi ve elde ettiği yapıyı bir kırınım ağı olarak inceledi.

Ortaya çıkan kırınım deseni, klasik kristallerde görülmeyen onlu simetriye sahipti. Bu sonuç, periyodik olmadan da düzenli bir atomik yapının mümkün olabileceğini gösteriyor; ancak dönemin kristalografi anlayışı bu tür bir yapıyı tanımlamakta yetersiz kalıyordu. Mackay'nin bu modeli, literatürde henüz adı konmamış olan bu sıra dışı yapıların anlaşılmasında kritik bir köprü işlevi gördü.

Nitekim Daniel Shechtman'ın laboratuvarında gözlemlediği ve başlangıçta açıklanamayan kırınım desenleri, Mackay'nin öngördüğü bu atomik düzenle örtüşüyordu. Paul Steinhardt ve Dov Levine'in çalışmalarıyla birlikte, bu yapılar kuazikristaller olarak tanımlandı ve böylece daha önce varlığı gözlemlenmiş ancak literatürde açıkça tanımlanamamış olan bu atomik düzenler bilim dünyasına kazandırılmış oldu.

Günümüzde yarı kristaller; dayanıklı yüzey kaplamalarından ısı yalıtımına, tıbbi malzemelerden endüstriyel uygulamalara kadar pek çok alanda kullanılmaktadır. Sahip oldukları sıra dışı fiziksel özellikler, bu yapıların yalnızca teorik bir merak konusu olmadığını, aynı zamanda yüksek teknolojinin önemli bir bileşeni hâline geldiklerini göstermektedir.

Sonuç olarak fraktal geometri, yalnızca doğadaki karmaşık şekilleri tanımlayan soyut bir matematik alanı değildir. Doğadan sanata, mimariden atomik yapılara uzanan bu yaklaşım, farklı disiplinlerin aynı geometrik dili konuşabildiğini göstermektedir. Yarı kristallerin keşfi de bu ortak dilin bir sonucudur: Matematiksel desenler, sanatsal sezgi ve fiziksel gözlem birleşerek doğada var olan ancak uzun süre "imkânsız" kabul edilen bir düzeni görünür kılmıştır. Bu çığır açıcı anlayış, ancak yıllar sonra bilim dünyasında tam anlamıyla kabul görmüş ve Daniel Shechtman'a 2011 yılında Nobel Kimya Ödülü kazandırmıştır.

■ Kaynaklar

- [1] Gök, İ. Fraktal geometri. Ankara Üniversitesi Açık Ders Malzemeleri. Erişim adresi: <https://acikders.ankara.edu.tr>

- [2] Hacısalihoğlu, H. H. (2017). Fraktal geometri. Ankara: Metin Yayınları.
- [3] Lu, P. J., & Steinhardt, P. J. (2007). Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture. *Science*, 315(5815), 1106-1110. <https://doi.org/10.1126/science.1135491>
- [4] TÜBİTAK Bilim Genç. (2011, Kasım). TÜBİTAK Bilim Genç Dergisi.
- [5] TÜBİTAK Bilim Genç. (2021). Romanesco karnabaharındaki sarmal fraktalların gizemi çözüldü. Erişim adresi: <https://share.google/FHM0BmQ9kx5Fqhnl1>
- [6] Uyar, A., & Öztürk, D. (2017). Fraktal analizin yeryüzü araştırmalarında kullanılması. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 17(2), 614-627.