

Harry Houdini: Bir Sihirbaz mı, Yoksa Bir Matematikçi mi?

ELİF MEDETOĞULLARI

TED Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

✉ elif.medetogullari@tedu.edu.tr



■ 1920’ler New York’unda Bir Gece



Gece yarısına yaklaşırken Broadway’in arka sokaklarından birinde küçük ama şatafatlı bir salon ısıllı parlıyor. İçeride dumanlı bir hava, kahkahalarla karışık fısıldaşmalar, parıltılı giysiler ve dikkatle bekleyen gözler... Salonun merkezinde yükselen küçük bir sahne var. Perdeler açılıyor, ışıklar kısılıyor ve tek bir spot sahnenin ortasındaki adama odaklanıyor.

Adam, dünyanın en ünlü sihirbazı Harry Houdini. Ellerinde sıradan görünen beyaz bir kâğıt tutuyor. Ne zincir var bu kez, ne kilitli bir kutu... Yalnızca bir kâğıt. Houdini onu birkaç kez dikkatlice katlıyor. Salon sessizleşiyor. Bir makas parıltısı göze çarpıyor. Houdini, tek bir hamleyle kâğıda bir kesik atıyor.

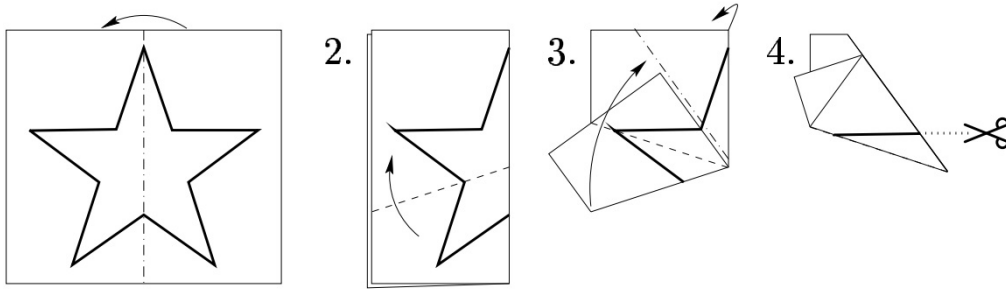
O an sanki zaman duruyor. Seyirciler nefeslerini tutmuş. Kâğıt açıldığında ise herkesin gözleri büyüyor: sıradan kâğıt, tek bir kesikle kusursuz bir yıldız şekline dönüşmüş. Salon alkışlarla çalkalanıyor.

Bir an için herkes sihre inanıyor. Ama perde arkasında, bu “mucizenin” matematikle gizli bir bağı var...

■ Houdini ve Kâğıdın Sihri

Harry Houdini (1874–1926), asıl adıyla Erik Weisz, Macaristan’da doğup Amerika’da ünlenen bir illüzyonistti. Zincirlere, kelepçelere, su dolu tanklara meydan okuyan kaçış gösterileriyle dünyanın dört bir yanında şöhret kazandı. Onun için sahne yalnızca eğlencenin değil, aynı zamanda insanın sınırlarını zorlamanın da yeri idi.

Ne var ki Houdini’nin ilgisi yalnızca zincirlerden kurtulmaya değildi. 1922’de yayımladığı *Paper Magic* (Sihirli Kâğıt ya da Kağıt Sihri/Kağıttan Sihir) isimli kitabında, kâğıtla yapılabilecek basit ama şaşırtıcı illüzyonları topladı [3]. Sayfalar arasında kâğıttan yüzükler, şapkalar, tavşan figürleri ve seyirciyi hayrete



Şekil 1. Houdininin *Paper Magic* kitabında tarif edilen beş tepeli yıldız. Çizgiler boyunca okla belirtilen yönlerde kesikli çizgiler boyunca katlayıp, makasla kalın siyah çizgi boyunca kesin. [4]

düşüren “tek kesik” numaraları yer alır. Bir kâğıdı katlayıp tek hamlede yıldız çıkarmak, ya da basit bir kesikle karmaşık şekiller elde etmek... Bugün bunlar “çocuk oyunu” gibi görünse de, Houdini döneminde seyirciyi büyüleyen bir mucizeydi.

Matematiksel açıdan bakıldığında, *Paper Magic* sıradan bir eğlence kitabı olmanın ötesine geçer. Çünkü burada tarif edilen birçok numara aslında katlama geometrisinin erken örnekleridir. Houdini belki bunu “matematik” adı altında sunmuyordu, ama kâğıdın potansiyelini keşfetmeye yönelik merakı, ileride matematikçilerin üzerinde çalışacağı büyük problemlere kapı aralıyordu.

■ Tek Kesik Problemi

Houdini’nin *Paper Magic* kitabında yalnızca bir sahne numarası gibi görünen “tek kesik” hilesi, aslında matematikte daha genel ve derin bir problemle örtüşür. Bu problem günümüzde “Fold-and-Cut Theorem” ya da Türkçe ifadesiyle “Katla ve Tek Kes” problemi olarak bilinir.

Problem Tanımı: Bir dülemsel çokgen P verilsin. Bu çokgeni, bir kâğıdın üzerine yerleştirmek istiyoruz. Acaba bu kâğıdı yalnızca katlama işlemleriyle öyle bir hale getirebilir miyiz ki, tek bir düz kesim yapıldığında P çokgeni eksiksiz ve doğru biçimde ortaya çıksın?

Başka bir ifadeyle: *Hangi şekiller yalnızca tek bir kesikle elde edilebilir?*

Kirigami: Origami, -ori (katlanmış ya da katlamak) ve-gami (kâğıt) kelimelerinin birleşiminden oluşan bir sözcüktür. Bu problemde ise katlamanın yanısıra kesmeye de müsade edilir. Bu durum için kullanılan sözcük ise “kirigami” dir. (Kiri’ nin kesmek anlamına geldiğini tahmin ediyorsunuzdur:)) Yapmayan yoktur diye düşünüyorum, anakuldayken ya da ilkokuldayken kâğıdı katlayıp keserek elele tutuşan çocuklar elde ederdik.



Hemen bu noktada sizi geçmişe götürelim ve kirigami denemeleri yapalım ama bu sefer bir kısıtımız var, makasla tek bir kesik atma hakkımız var. E büyüdük artık, işler biraz daha zorlaşsın değil mi?

Örnek 1.

Kare kağıdı uygun şekilde katlayıp, tek bir kesikle

- önce eşkenarüçgen kesmeyi deneyin,
- ardından bir kare kesmeyi deneyin,
- sonra kağıdın yarı alanına sahip bir kare deneyin,
- sonra düzgün altıgen,
- düzgün sekizgen,
- daha sonra düzgün beşgen ve düzgün beş tepeli yıldız

deneyin. Peki düzgün yedigen ya da dokuzgen için de benzer işlemleri yapabilir miyiz sizce? Problemi biraz daha zorlaştırmak isterseniz, katlama sayınıza sınır koyun, örneğin en fazla 4 katlama ile bu işlemi yapabilir miyim? Peki üç yeterli olur mu? Bu soruların bazılarına cevaplar ve farklı kirigami örnekleri Google booksta Cansu Betin Onur ve Sinem Onaran’la birlikte etkinlik örneklerimizi topladığımız ücretsiz kitaba bakabilirsiniz:



Bu problem kombinatoriyal geometri ve algoritmik origaminin kesişiminde yer alır. Katlama işlemi düzlemin belirli bölgelerini üst üste bindiren geometrik dönüşümlerdir. Tek kesik, bütün bu katlamaların sonucunda oluşan karmaşık üst üste binmiş kâğıt tabakalarının bir "tek kesme işlemi" ile kesilmesidir. Burada kritik nokta, çokgenin tüm kenarlarının aynı anda ortaya çıkmasını sağlamaktır.

Matematikçilerin merakı şuydu: *Sadece bazı özel şekiller mi bu yolla elde edilebilir, yoksa her çokgen için böyle bir katlama vardır mı?* Hatta çokgenin tek parça ve bağlantılı olmasına bile gerek yok!

■ Problemin Çözümü: Fold-and-Cut Teoremi

Bu soruya kesin yanıtı 1998–1999 yıllarında Erik D. Demaine, Martin L. Demaine ve Anna Lubiw verdi. Ortaya koydukları teorem günümüzde "Fold-and-Cut Theorem" olarak bilinir [4, 5].

Teorem 1. (Demaine–Demaine–Lubiw, 1998/1999)

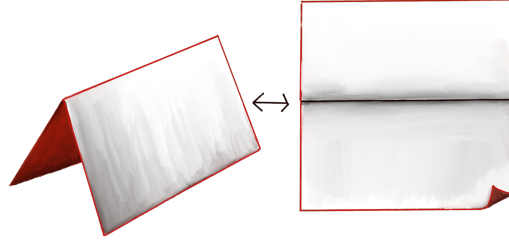
Herhangi bir düzlemsel çokgen P , uygun katlamalar yapılarak bir kâğıt üzerinde öyle yerleştirilebilir ki, tek bir düz kesim sonucunda P eksiksiz ve doğru biçimde ortaya çıkar.

İspat: Yöntem İki farklı yöntemle bu teorem kanıtlanabilmektedir.

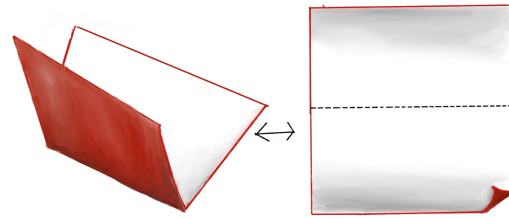
- İlk yöntem, "*straight skeleton (doğrusal iskelet)*" yöntemini kullanıyor, kullanıcı dostu bir yapıcı algoritma sunuyor ancak matematiksel olarak ispatı biraz zayıf (Bu yazıda bu algoritma verilecektir:))
- İkinci yöntem ise "*disc packing (daire paketleme)*" yöntem olarak bilinen bir yöntemle teorik olarak daha güçlü ancak pratikte uygulaması daha karmaşık bir yöntem.

Doğrusal iskelet yöntemi 1995 yılında Oswin Aichholzer ve arkadaşlarının makalesinde verilmiş [1] ve bir çok araştırmada farklı şekillerde kullanılmıştır. Temel olarak bir poligonun içine giderek küçülen (ya da büzülen), eşit aralıklarla çokgenin kenarlarına paralel kenarlarını oluşturduğumuzda ve en sonunda başlangıçtaki poligonun ve içerde çizilen tüm poligonların köşelerini birleştirerek kenarlar ve/veya köşeler ve/veya küçültme işlemi sonunda elde kalan kenarla elde edilen bir graftır. Demaine ve arkadaşları bu yöntemi kullanarak kesmek istediğimiz çokgeni kağıda çizer ve içinde köşelerden geçen aslında çokgenin açıortaylarında oluşan doğrusal iskeletini elde ederler. Aşağıda bazı önemli tanımlardan bahsettikten sonra basit örneklerle neden doğrusal iskelet yönteminin işe yarar bir araç olduğunu göreceğiz. Buradaki en

önemli ve çok sık kullanılacak ifadelerden biri de "kat izi (crease)" ve türleridir. Kağıdı her katladığınızda üzerinde bir çizgi oluşur buna kat izi deriz. Katlanmış bir modeli açtığınızda "kat izi desenini (crease pattern)" elde edersiniz. Kat izi desenlerinde iki farklı çizgi göreceksiniz, örneğin "düz çizgi, kesikli çizgi" gibi veya "kesikli çizgi, kesikli ve noktalı" çizgi ya da "mavi çizgi, pembe çizgi" gibi. Bir tür çizgi boyunca dağ (yani dış bükey) diğeri boyunca da vadi (yani içbükey) katlama yapacağınız anlamına geliyor.

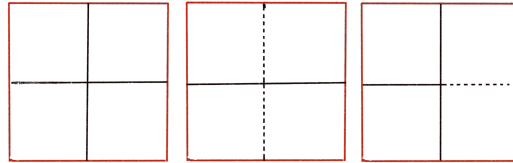


Şekil 2. Dış bükey kat izi (yani Dağ)

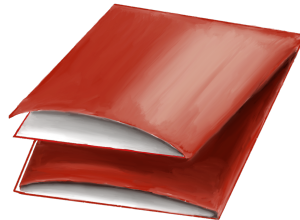


Şekil 3. İç bükey kat izi (yani Vadi)

Not: Kağıdı kat izi desenlerinde belirtilen tüm izleri dağ/vadi atamalarına göre yapıp katladıktan sonra elde ettiğiniz bir modeli bir kitabın içine yeni bir kat izi oluşmadan veya herhangi bir kat izinin yönü değişmeden koyabiliyorsanız o modele *düz katlanabilir* (flat foldable) model denir.



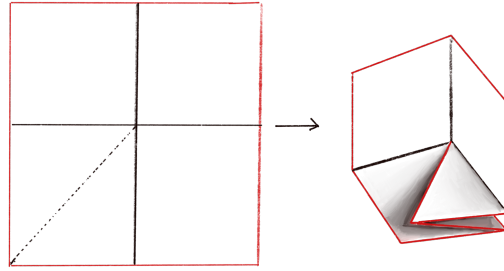
Şekil 4. Bu kat izlerinin tümünü türüne (dağ/vadi) uygun katlayabilir misiniz?



Şekil 5. Şekil 4'teki kat izi desenlerinden sadece en sonuncu kat izi desenin katlandığını görmüşsünüzdür. Bu kat izi desenin katlanmış haline *basit* ya da *temel* katlama denir.

Tek köşeli kaz izi desenleri için düz katlanabilirlikle ilgili üç temel teorem vardır. Kawasaki, Meguro ve Maekawa teoremleri [7]. Kawasaki teorem bir köşe etrafındaki kat izlerinin aralarında kalan açılarla ilgili şunu söyler: Birer atlayarak açılar topladığımızda 180° olmalıdır. Maekawa'da "bir köşede birleşen

dağ ve vadi kat izi sayılarının farklı iki olmalıdır" der. Meguro ise düz katlanabilir modelin iki renkle boyanabileceğini söyler. Maalesef birden fazla köşeli kat izi desenleri için bu problemlerin bazıları NP-Tamdır, [2].

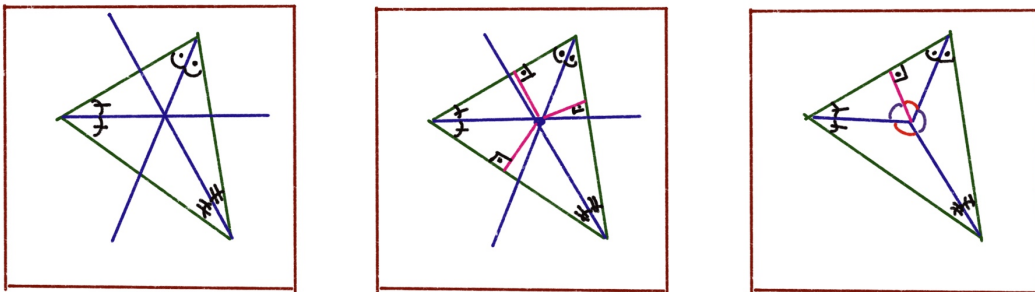


Şekil 6. Soldaki kat izi deseninde dağ ve vadi sayılarına bakarsanız Maekawa teoremini sağlamadığını göreceksiniz ($4 - 1 \neq 2$) dolayısı ile kat izleri türlerine uygun katlandığında sağdaki gibi düz katlanabilir olmayan bir model elde edilecek.

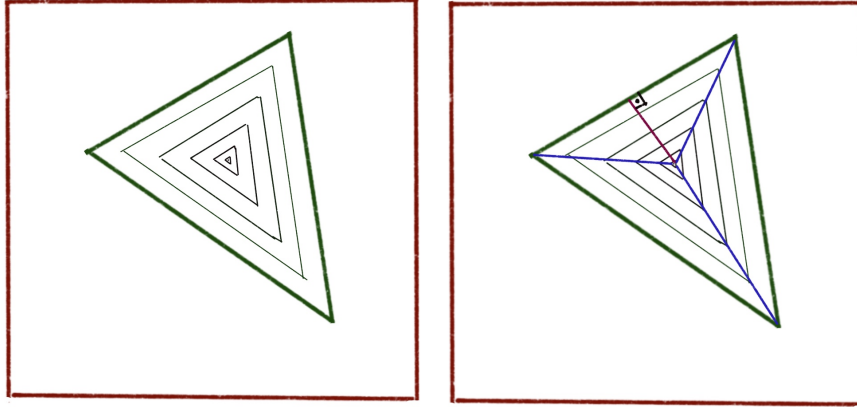
Kağıdı katlayıp kesebilmek için de düz katlanabilir hale gelmesi gerekir. Dolayısı ile bu yazıda bahsedilen problemin çözümünde elde edilecek kat izi desenin yerel olarak Kawasaki ve Maekawa koşullarının sağlanması kriteri göz önüne alınır.

■ Arka Plan

Katla ve tek kes teoremi, herhangi bir düzlemsel çokgenin uygun katlamalarla tek bir düz kesimle elde edilebileceğini söyler demiştik. İspat yapıcıdır: bir *doğrusal iskelet* üzerinden türetilen kat izi deseni ve uygun dağ/vadi atamaları, tek kesimi mümkün kılar. Aslında elde edilen iskelet çokgenin açkırtaylarından oluşmakta ve bu iskelete köşelerden kesim hattına çizilen uygun dikmelerle gerekli kat izi deseni üretilmektedir. Bu kat izi deseni tek değildir. Eğer kesmek istediğimiz çokgen bir üçgense, doğrusal iskeletin aslında üçgenin tek noktada birleşen açkırtaylarını demek olduğunu görelim. Örnek 1’te bahsedilen şekiller üçgen dahil düzgün çokgenlerdi, bu nedenle simetrik katlamalarla çözüme ulaşmak biraz daha kolaydı. Burada ise çeşitkenar bir üçgen için bir çözüm bulmaya çalışacağız. Ama oradaki üçgen için kullandığınız fikrin burada da işlediğini görebilirsiniz.

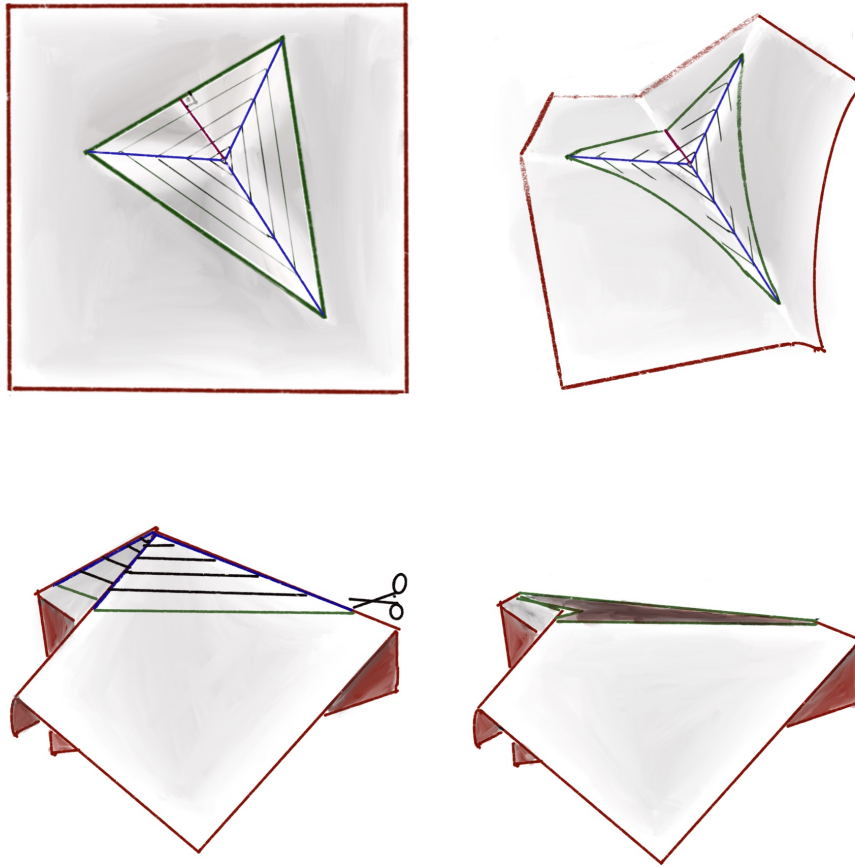


Şekil 7. Herhangi bir üçgenin açkırtayları bir noktada keşir. Bu noktadan üçgenin kenarlarına dikme inmek mümkündür (içteğet çemberin yarıçapları). Açkırtayları dağ, bu dikmeyi vadi alalım. Bu dikmelerden sadece bir tanesini almamız yeterlidir. Son resimde böylece Maekawa teoremi sağlanır (çünkü $3 - 1 = 2$). Açılarla ilgili de Kawasaki teoreminin sağlandığını hemen görebilirsiniz yani mor açılar toplamı da kırmızı açılar toplamı da 180° dir.



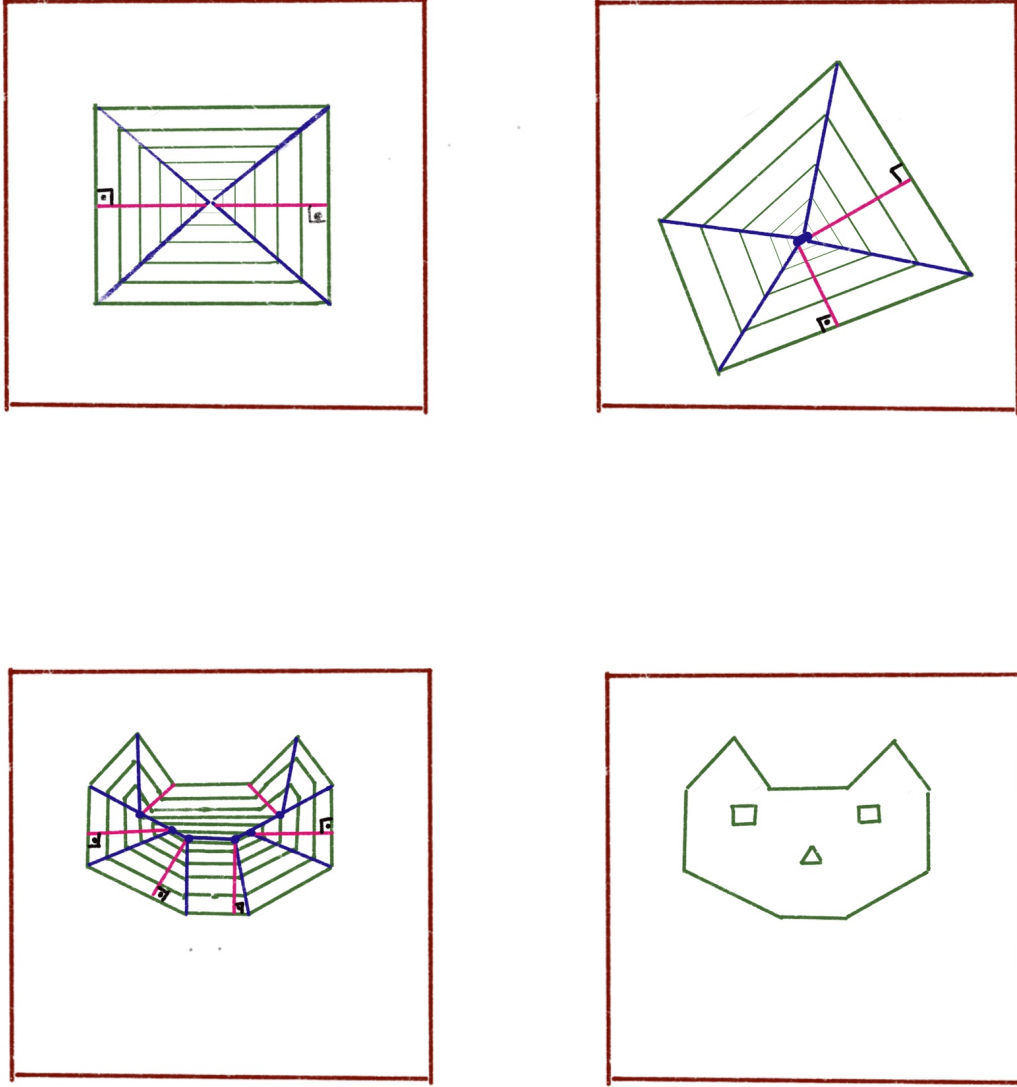
Şekil 8. Aichholze ve arkadaşlarının makalesinde [1] tarif edilen yöntemle doğrusal iskelet oluşturuldu (mavi) ve düz katlanabilirlik teoremlerine uygun dikme (pembe) eklendi. 7 ile karşılatırarak elde edilen doğrusal iskeletin aslında açortaylar olduğunu görebilirsiniz)

Şimdi kat izlerinin türüne uygun katladığınızda üçgenin kenarlarının düz bir çizgi şeklinde kağıdın ön ve arka yüzünde yer aldığını göreceksiniz.



Şekil 9. Kat izlerine uygun biçimde (maviler çizgiler boyunca dağ, pembe çizgi boyunca vadi) katladığınızda yeşil ile çizilen üçgenin kenarlarının üstüste geldiğini göreceksiniz. 3. adımda belirtiltiği gibi bu çizgi boyunca makasla keserseniz ve açarsanız üçgeni tek kesikle elde edeceksiniz.

Şimdi sırasıyla bir kare ardında özel olmayan bir dörtgen alıp doğrusal iskelet ve ardından dikmeleri bulalım:



Şekil 10. Sırasıyla, bir kare, herhangi bir dörtgen ve bir kedi:) kat izleri oluşturuldu. Bu izlerden türüne (dağ/vadi) uygun katlamaları yapıp keserseniz istenilen modeli tek kesile elde edebilirsiniz. Sonuncu figürün kat izlerini sizlere bir meydan okuma olarak bıraktık. Doğru kat izlerini bulup kesen ilk kişiye bir sürprizim olacaktır.

Artık Demaine ve arkadaşlarının verdiği algoritmayı yazalım. Elbette algoritmada burada verilenden çok daha karmaşık örnekler için verilen *koridor türü belirleme* ve *ağaç kontrolleri* var. Bu yöntemlerden bu yazının uzunluğunu göz önünde bulundurarak burada bahsetmeyeğiz. Ayrıca konu ile ilgili açık sorular olduğunu da tüm ilgililere duyuralım. Size bu algoritma ile elde ettiğimiz kedi modelinin kat izlerini Şekil 10'da 3. resimde verdik. Bu model de koridor veya ağaç kontrollerine ihtiyaç duymaz.

■ Algoritma Şeması (Özet)

Algorithm 1 Katla ve Tek Kes teoremi için Doğrusal İskelet Tabanlı Şema

Require: Basit (veya delikli) düzlemsel çokgen ya da çokgenler ailesi P

Ensure: Tek düz kesimle P 'yi ortaya çıkaran kat izi deseni (Dağ-Vadi atamalarıyla)

- 1: **Ön işleme:** Girdi çokgen(ler)ini saat yönüne/tersi tekdüze yönlendir; iki-renkli yüz ayrımıyla dış/iç bölgeleri ayır.
- 2: **İskelet hesabı:** Kenarları eşzamanlı içe doğru *offset*le; köşe ikililerinin açığortay kesişimleri *edge event* (*kenar olayı*), bir köşenin karşı kenarla buluşması *split event* (*ayrı olay*) üretir. Olayları uzaklığa göre bir öncelik kuyruğunda işle ve doğrusal iskelet grafini inşa et.
- 3: **Dik katlar:** Doğrusal iskeletin köşelerinden kesim hattına inen *dik* kat izleri üret. Her dik ışın yüzeyi terk edene ya da bir başka bir kesim hattı bölgesindeki iskeletin kenarından yansıtılarak iskeletin bir köşesine varana kadar *yansımali* şekilde ilerlet.
- 4: **Kâğıt sınırı:** Tüm iskelet ve dik ışınları, kat izi desenini tamamen kapsayan bir dikdörtgen sınırla (kâğıt) sınırlayıp sonlu hale getir.
- 5: **Koridorlar:** İskelet ve dik katlardan oluşan ağda koridorları (akordiyon kanalları) belirle; her koridor için katlanma yönü alternansını (Dağ/Vadi) oluşturun.
- 6: **Dağ/Vadi ataması:** Koridor alternansı ile tüm kat izi kenarlarına Dağ/Vadi ata; doğrusal iskelette, 180° den küçük açıların açığortayları dağ, 180° den küçük açılarının açığortayları dağ, 180° den büyük açılarının açığortayları vadi olur. Dikler dağ/vadi olarak değişir. Gerekli yerlerde gölge-ağaç/mesafe tabanlı tutarlılık kontrolü uygula.
- 7: **Kesim hattı:** Çokgen kenarlarının *aynı doğruya hizalandığı* hattı seç; tek düz kesimi bu hat üzerinde yap.
- 8: **return** Dağ-Vadi etiketli kat izi deseni.

■ Peki kimdir Eric Demaine? - Genç Bir Dâhi

Eric D. Demaine (d. 1981), bilgisayar bilimi ve matematik alanında origamiyle ilgili çalışmalarıyla dünya çapında tanınan bir isimdir. Çocukluğundan itibaren babası Martin Demaine ile birlikte yoğun bir şekilde origamiyle ilgilenmiş, bu ilgisini akademik araştırmaya dönüştürmüştür.

Demaine, 20 yaşında Massachusetts Institute of Technology (MIT) tarihindeki en genç profesörlerden biri olmuştur. Çalışmalarının merkezinde algoritmik geometri, kombinatorik optimizasyon ve origami matematiği vardır. Katlama problemlerini yalnızca estetik bir uğraş olarak değil, bilgisayar biliminin temel algoritmik sorularıyla yakından ilişkili bir araştırma alanı olarak ele alır.

Özellikle *fold-and-cut teoremi*, origaminin bir "sanat" olmaktan öte, katı bir matematiksel yapı olduğunu ortaya koymuştur. Demaine ve ekibinin geliştirdiği algoritmalar, yalnızca origami değil, aynı zamanda malzeme bilimi, robotik ve mühendislikte katlanabilir yapıların tasarımında da kullanılmaktadır.



Demaine'nin dersi için QR kodu:

Bugün Eric Demaine, MIT'de bilgisayar bilimi profesörü olarak çalışmakta, origami ve matematik kesişiminde yeni problemler üzerine üretken bir araştırma programı yürütmektedir. Aynı zamanda babasıyla birlikte "mathematical art" sergileri açarak, bilimle sanat arasındaki sınırları zorlamaktadır. (Bakınız:



Şekil 11'de Eric Demaine'in elinde yer alan bağlantılı olmayan çokgenler gibi modelleri veya başka şaşırtıcı



modelleri tek kesikle nasıl elde edebileceğinize dair kat izi desenlerinin şablonları bu sayfada (



Şekil 11. Demaine'nin MIT'de, katla ve kes teoremini anlattığı dersten aldığım bu karede, kestikten sonra kağıttan birden fazla parça bağlantısız şeklin tek kesikle elde edilebilmesinin onda uyandırdığı heyecanı görebilirsiniz. Tüm dersi izlemek için aşağıdaki QR kodu kullanabilirsiniz.

verilmektedir, meydan okuma sorumuz Şekil 10'da verilen soru için bu şablonlardan destek almak isteyebilirsiniz:)).

■ Sonuç: Sihir ile Matematik Arasında İnce Bir Çizgi

Bir yanda 1920'lerin New York'unda, sahnede tek bir kesikle yıldız çıkaran bir sihirbaz: Harry Houdini. Diğer yanda 1990'ların sonunda, teorik bilgisayar biliminin en saygın konferanslarında aynı soruya kesin bir yanıt veren matematikçiler: Erik Demaine ve ekibi.

Houdini için bu, seyircinin nefesini kesen bir illüzyondur. Basit bir kâğıt, birkaç katlama ve tek bir makas darbesiyle mucizeye dönüşüyordu. Seyirciler alkışlarken, belki de hiçbiri bunun ardında evrensel bir matematiksel ilkenin gizlendiğini düşünmüyordu.

Demaine içinse aynı kâğıt, soyut bir düzlem, çokgenlerin geometrisi ve algoritmaların diliydi. Bir ispat, yalnızca özel şekiller için değil, her çokgen için tek kesikle elde edilebilirliği güvence altına alıyordu. Burada sihir yoktu; ama en az sihir kadar büyüleyici bir hakikat vardı: kâğıdın altında yatan matematiksel düzen.

Belki de Houdini gerçekten yalnızca bir sihirbazdı. Belki de farkında olmadan matematik tarihine ilham veren bir öncüyü oynuyordu. Kesin olan şu ki, kâğıdın katları arasında hem illüzyonun hem de matematiğin ortak bir dili var. Katlanmış bir kâğıdın sessizce fısıldadığı şey şudur: **Bazen sihir/mucize, yalnızca doğru zamanda atılmış tek bir kesiktir.**

■ Uyarı: Tarihsel Bağlantının Sınırları

Houdini'nin yaşadığı yıllarda "Geometry of Paper Folding, T.Sundara Row, (1890)", "Hidden Senbazuru Orikata (Bin Turna Katlamanın Sırları), Akisato Ritō, (1797)" "A Japanese Book Wokoku Chiyekurable, K.S. Sen, (1721)" kitapları vardı ve origami özellikle avrupada okullarda kullanılmaya başlamıştı. Dolayısı ile Houdini'nin origami bildiğini tahmin etmek zor değil. Houdini'nin Paper Magic kitabındaki tek kesik numaraları, bugün katla ve tek kes teoreminin özel örnekleri olarak yorumlanabilir. Ancak bu noktada dikkat edilmesi gereken iki sınırlama vardır: Birincisi, Houdini'nin esas amacı sahne illüzyonu yaratmaktı. İkincisi, elimizde Demaine ve arkadaşları'nın doğrudan Houdini'den esinlendiğine dair bir kanıt yoktur. Dolayısıyla bu bağlantı, birebir bir nedensellikten çok, aynı fenomenin farklı bağlamlarda ortaya çıkışı olarak düşünülebilir. Houdini'nin yaptığı şey sınırlı sayıda basit şekille gösterilen bir sihirdi; Demaine ve arkadaşları'nın ispatı ise bu fikrin evrensel düzeyde, tüm çokgenler için geçerli olduğunu ortaya koymuştur.

■ Kaynaklar

- [1] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, D. Albers, and B. Gärtner, "A novel type of skeleton for polygons," *Journal of Universal Computer Science*, vol. 1, no. 12, pp. 752–761, 1995.

- [2] M. Bern and B. Hayes, “The complexity of flat origami,” in *Proceedings of the 7th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '96)*, pp. 175–183, 1996.
- [3] H. Houdini, *Paper Magic: A Treatise on the Art of Paper Folding*. E.P. Dutton & Company, 1922.
- [4] E. D. Demaine, M. L. Demaine, and A. Lubiw, “Folding and Cutting Paper,” *Discrete & Computational Geometry*, vol. 20, no. 1, pp. 3–21, 1998.
- [5] E. D. Demaine, M. L. Demaine, and A. Lubiw, “Folds and One Straight Cut Suffice,” *Proc. 10th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'99)*, pp. 891–900, 1999.
- [6] T. C. Hull, *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. A K Peters, 2006.
- [7] T. C. Hull, *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*. Cambridge University Press, Cambridge, 2020.
- [8] R. J. Lang, *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*, 2nd ed., CRC Press, 2012.