

Değişmeli Banach Cebirlerinin Gelfand Teorisi

UĞUR GÜL

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ gulugur@hacettepe.edu.tr



Bu yazıda değişmeli Banach cebirlerinin en temel yapı teorisi olan Gelfand Teorisini ele alacağız. Büyük Rus matematikçi Israel Moiseevich Gelfand'ın (1913-2009) doktora tezinde (1935) geliştirdiği bu teori değişmeli Banach cebirlerinin sürekli fonksiyon uzayları ile bağlantısını ortaya koyması bakımından matematik literatüründe çok önemli bir yere sahiptir.

1. BANACH CEBİRLERİ

Bir A vektör uzayı üzerinde onu aynı zamanda halka yapan bir çarpım var ise A 'ya bir **cebiri** denir. Bu yazıda vektör uzaylarımız daima karmaşık sayılar cismi $\mathbb{C}$ üzerinden olacaktır. Eğer A cebri normlu bir vektör uzayı ise A 'ya bir **normlu cebiri** denir. Eğer A normlu cebri, normun türettiği metriğe göre tam ise, yani A 'daki her Cauchy dizisi yakınsak ise, (bir başka deyişle A bir Banach uzayı ise) ve A 'nın üzerindeki çarpım

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A$$

aksiyomunu sağlıyorsa, A 'ya bir **Banach cebri** denir. Bir Banach cebirinin halka yapısını incelemek için onun tersinir elemanlarını incelemek önemlidir. Tersinirlikten sözedebilmemiz için cebrimizin birimli olması yani çarpma işleminin bir birim elemanı olması gerekir. Ne yazık ki her Banach cebirinin birimi yoktur. Bunun en bilinen örneği X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı olmak üzere

$$K(X) := \{T : X \rightarrow X \mid T \text{ tıkHz doğrusal operatördür}\}$$

ile tanımlanan tıkHz operatörler cebridir.

1.1. Banach Cebirlerine Örnekler

(1) X tıkHz Hausdorff bir topolojik uzay olmak üzere

$$A := C(X) : \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ sürekli}\}$$

sürekli fonksiyonlar uzayı noktasal toplam

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

noktasal çarpım

$$(fg)(x) := f(x)g(x)$$

işlemleri ve

$$\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

normu ile bir Banach cebridir. Burada A 'nın normunun

$$\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_{\infty} \quad \forall f, g \in A$$

şartını sağladığı aşikardır.

(2)

$$A := C_0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ sürekli ve } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R} \setminus [-N, N]\} < \varepsilon\}$$

biçimindeki sonsuzda sıfır olan sürekli fonksiyonlar uzayı da noktasal toplam, noktasal çarpım ve

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

normu ile bir Banach cebridir.

(3) X bir Banach uzayı olmak üzere

$$A := B(X) := \{T : X \rightarrow X : T \text{ doğrusal ve sınırlı operatör}\}$$

biçimindeki sınırlı doğrusal operatörler uzayı da noktasal toplam

$$(S + T)(x) := Sx + Tx,$$

bileşke işlemi

$$(ST)(x) := S(T(x))$$

ve operatör normu

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_X : \|x\|_X \leq 1\}$$

ile bir Banach cebridir. Yine A 'nın normunun

$$\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\| \quad \forall T, S \in A$$

şartını sağladığı aşikardır.

(4) Yine X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı olmak üzere

$$A := K(X) := \{T : X \rightarrow X : T \text{ doğrusal ve tıkHz operatördür}\}$$

biçimindeki tıkHz operatörler uzayı, yine noktasal toplam

$$(S + T)(x) := Sx + Tx,$$

bileşke işlemi

$$(ST)(x) := S(T(x))$$

ve operatör normu

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_X : \|x\|_X \leq 1\}$$

ile bir Banach cebridir.

Bir $T : X \rightarrow X$ operatörü $S := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ için $\overline{T(S)} := \overline{\{Tx : x \in S\}} \subset X$ 'de tıkHzdır şartını sağlıyorsa yani X 'in kapalı birim yuvarının T altındaki görüntüsünün kapanışı X 'de tıkHz ise T 'ye bir **tıkHz operatör** denir. TıkHz operatörler sınırlıdır ve eğer $K(X) = B(X)$ ise X sonlu boyutludur ve bu da $I : X \rightarrow X, I(x) := x$ birim operatörünün tıkHz olmasına denktir (Bir Banach uzayı sonlu boyutludur ancak ve ancak kapalı birim yuvarı tıkHzdır).

Yukarıdaki ilk iki örnek değişmeli Banach cebirlerinin tipik örnekleridirler, ilk örnek birimli iken ikinci örnek birimli değildir. Son iki örnek ise değişmeli olmayan Banach cebirlerinin tipik örnekleridirler, üçüncü örnek birimli iken son örnek birimli değildir.

2. BİRİMLEŞTİRME

Bir Banach cebri birimli değil ise onu birimli bir Banach cebirinin içerisine izometrik olarak gömme işlemine **birimleştirme** denir. Burada temel fikir Banach cebirindeki bir $a \in A$ 'yı A 'nın kendisi üzerindeki bir çarpma operatörü olarak görmektir, yani her $a \in A$ 'ya bir $M_a : A \rightarrow A, M_a(b) := ab$ operatörü karşılık gelir.

Yani $\iota : A \hookrightarrow B(A)$, $\iota(a) := M_a$ şeklinde bir operatörle A , $B(A)$ içerisine gömülür. Fakat bu gömme her zaman izometrik olmayabilir, ancak

$$\|ab\|_A \leq \|a\|_A \|b\|_A \quad \forall a, b \in A$$

olduğundan dolayı

$$\|M_a\| \leq \|a\|_A \quad \forall a \in A$$

sağlanır. Bu ι gömmesi her zaman izometrik olmayacağından onu taklit eden bir inşaa ile A 'nın bir birimleştirilmesi dışsal olarak yapılabilir:

$$\tilde{A} := \mathbb{C} \oplus A := \{(\lambda, a) : \lambda \in \mathbb{C}, a \in A\}$$

olsun. Bu $\tilde{A}$ kümesine çarpımı, $\iota : A \hookrightarrow B(A)$ gömmesinden ilham alarak yani

$$(\lambda I + M_a)(\mu I + M_b) = \lambda\mu I + M_{\lambda b + \mu a + ab}$$

olduğunu gözönünde bulundurarak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $a, b \in A$ için

$$(\lambda, a) \cdot (\mu, b) := (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab)$$

olarak tanımlayabiliriz. Aynı şekilde toplam

$$(\lambda, a) + (\mu, b) := (\lambda + \mu, a + b)$$

olarak tanımlanır. Bir tek $\tilde{A}$ üzerinde norm tanımlamak kalıyor ki onu da

$$\|(\lambda, a)\| := |\lambda| + \|a\|_A$$

şeklinde tanımlarız. Bu durumda $\iota : A \hookrightarrow \tilde{A}$, $\iota(a) := (0, a)$ şeklindeki gömme izometriktir ve $(1, 0_A) \in \tilde{A}$, $\tilde{A}$ 'nın birimi olur. Yani $\tilde{A}$ birimli bir Banach cebridir ve $\iota : A \hookrightarrow \tilde{A}$ izometrik bir gömmedir. Burada her $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $a, b \in A$ için

$$\|(\lambda, a)(\mu, b)\| \leq \|(\lambda, a)\| \|(\mu, b)\|$$

şartının sağlandığını da görmek zor değildir. Ayrıca eğer A değişmeli ise $\tilde{A}$ da değişmelidir. Birimleştirme ile eğer A Banach cebri birimi yok ise A 'nın yerine onun $\tilde{A}$ birimleştirmesini alarak birimli varsayabiliriz.

3. TERSİNİR ELEMANLAR VE SPEKTRUM

A birimli bir Banach cebri olsun öyle ki $1 \in A$, A 'nın birim elemanı, yani A 'nın üzerindeki çarpmanın birimi olsun. O hâlde bir $a \in A$ elemanı için bir $a^{-1} \in A$ varsa ki

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

sağlanır, bu durumda $a \in A$ 'ya **tersinir** denir. Birimli bir A Banach cebri için

$$\mathcal{G}(A) := \{a \in A : a \text{ tersinirdir}\} \subset A$$

tersinir elemanların kümesinin A 'daki çarpmaya göre bir grup olduğu aşıkardır. Bir $a \in A$ elemanının **spektrumu**

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)\}$$

olarak tanımlanır. Tersinir elemanlarla ilgili aşağıdaki gözlem sonuçları bakımından çok önemlidir:

Teorem 1. (Neumann Serisi)

A birimli Banach cebri olsun ve $1 \in A$, A 'nın birimi olsun. Ayrıca $a \in A$ olsun. Eğer $\|a\| < 1$ ise

$1 - a \in \mathcal{G}(A)$ 'dır, yani tersinirdir ve tersi de

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n,$$

$a^0 := 1$ olmak üzere, bir kuvvet serisi ile verilir.

Kanıt. Her $N \in \mathbb{N}$ için

$$1 - a^{N+1} = (1 - a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^N) = (1 + a + a^2 + \cdots + a^N)(1 - a)$$

olduğunu görmek zor değildir. Bu durumda $a^0 := 1$ olmak üzere

$$S_N := \sum_{n=0}^N a^n$$

şeklinde tanımlanan $\{S_N\}_{N=1}^{+\infty} \subset A$ dizisinin A 'da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim: $N, M \in \mathbb{N}$ ve $N > M$ olsun, o hâlde

$$\begin{aligned} \|S_N - S_M\| &= \left\| \sum_{n=M+1}^N a^n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|a^n\| \leq \sum_{n=M+1}^N (\|a\|)^n \\ &= \|a\|^{M+1} \sum_{n=0}^{N-M-1} \|a\|^n \end{aligned}$$

ve $\|a\| < 1$ iken

$$\sum_{n=0}^{N-M-1} \|a\|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|}$$

olduğundan

$$\|S_N - S_M\| \leq \frac{\|a\|^{M+1}}{1 - \|a\|}$$

elde edilir ki bu da

$$\|S_N - S_M\| \rightarrow 0, \quad N, M \rightarrow +\infty$$

olması, yani $\{S_N\}_{N=1}^{+\infty} \subset A$ dizisinin Cauchy dizisi olması demektir. Burada A bir Banach uzayı olduğundan $\{S_N\}_{N=1}^{+\infty} \subset A$ dizisi yakınsaktır, $\lim S_N := y \in A$ olsun. O hâlde $\lim 1 - a^{N+1} = 1$ olduğundan

$$(1 - a)y = y(1 - a) = 1$$

sağlanır. □

Bu teoremin bir diğer ifadesi de eğer $\|1 - a\| < 1$ ise $a \in \mathcal{G}(A)$ 'dır, yani a tersinirdir, şeklindedir. Yani $B(1, 1) := \{a \in A : \|1 - a\| < 1\} \subset \mathcal{G}(A)$ dır. Bunun bir sonucu olarak, $\mathcal{G}(A)$ 'nın çarpma işlemine göre bir grup olduğu gözönüne alındığında, $\mathcal{G}(A)$ 'nın A 'nın açık bir altkümesi olduğu elde edilir:

Önerme 1.

A birimli bir Banach cebri ve $\mathcal{G}(A) := \{a \in A : a \text{ tersinirdir}\}$ olsun. O hâlde $\mathcal{G}(A) \subset A$ 'nın açık bir altkümesidir.

Kanıt. $a \in \mathcal{G}(A)$ olsun. Ayrıca $b \in B(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}) := \{b \in A : \|b - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}\}$ olsun. O hâlde $a^{-1}(b - a) = a^{-1}b - 1$ olduğundan $\|b - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ ise

$$\|1 - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(b - a)\| \leq \|a^{-1}\| \|b - a\| < \|a^{-1}\| \frac{1}{\|a^{-1}\|} = 1$$

olur ki bu da $a^{-1}b \in \mathcal{G}(A)$ olması demektir. Yani $\|b - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ ise $a^{-1}b \in \mathcal{G}(A)$ dır. Burada $\mathcal{G}(A)$ çarpma işlemine göre bir grup olduğundan $\|b - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ ise $a^{-1}b \in \mathcal{G}(A)$ ve $a \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow a(a^{-1}b) = b \in \mathcal{G}(A)$ olur, yani $a \in \mathcal{G}(A)$ ise $B(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}) \subset \mathcal{G}(A)$ olduğundan $\mathcal{G}(A) \subset A$ 'nın açık bir altkümesidir. $\square$

Önerme 1'in bir sonucu da spektrum $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ kümesinin tümleyeni olarak tanımlanan $\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ **resolvent kümesinin** açık olması, dolayısıyla $\sigma(a)$ 'nın her zaman kapalı bir küme olmasıdır: $\lambda_0 \in \rho(a)$ $\rho(a)$ 'nın herhangi bir elemanı olsun, o hâlde $\lambda_0 1 - a \in \mathcal{G}(A)$ sağlanır. Burada $\mathcal{G}(A) \subset A$ açık olduğundan bir $\delta > 0$ vardır ki $B(\lambda_0 1 - a, \delta) := \{b \in A : \|b - (\lambda_0 1 - a)\| < \delta\} \subset \mathcal{G}(A)$ sağlanır. Bu durumda $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ ise $\|(\lambda 1 - a) - (\lambda_0 1 - a)\| = |\lambda - \lambda_0| < \delta$ olduğundan $\lambda 1 - a \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ sağlanır. Dolayısıyla $D(\lambda_0, \delta) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \delta\} \subset \rho(a)$ sağlanır ki bu da $\rho(a) \subset \mathbb{C}$ 'nin açık ve $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ 'nin kapalı olması demektir. Aynı şekilde $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ 'nin sınırlı olduğunu ve hatta $\sigma(a) \subset D(0, \|a\|) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\}$ olduğunu gösterebiliriz: $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda| > \|a\|$ olsun. O hâlde $\lambda 1 - a = \lambda(1 - \frac{a}{\lambda})$ ve $\|\frac{a}{\lambda}\| < 1$ olduğundan $1 - \frac{a}{\lambda} \in \mathcal{G}(A)$ olur. Aynı zamanda $\lambda \neq 0$ olduğundan $\lambda(1 - \frac{a}{\lambda}) = \lambda 1 - a \in \mathcal{G}(A)$ olur, yani $|\lambda| > \|a\|$ ise $\lambda 1 - a \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(a)$ olur. Bu da $\lambda \in \sigma(a)$ ise $|\lambda| \leq \|a\|$ olmasına denktir. Sonuç olarak $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ her zaman kapalı ve sınırlı, dolayısıyla tıkHz bir kümedir.

Tersinir elemanların kümesinin açık olmasına paralel olarak ters alma işlemi de $\bullet^{-1} : \mathcal{G}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ fonksiyonu olarak düşünüldüğünde olabildiğince düzgün bir fonksiyon olduğu, hatta analitik olduğu görülür: $x_0 \in \mathcal{G}(A)$ ve $x \in B(x_0, \frac{1}{\|x_0^{-1}\|})$ olsun, bu durumda $\|1 - x_0^{-1}x\| < 1$ olduğundan

$$(x_0^{-1}x)^{-1} = x^{-1}x_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - x_0^{-1}x)^n \Rightarrow x^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - x_0^{-1}x)^n x_0^{-1}$$

olarak bulunur yani x^{-1}, x^n 'lerin, $n \in \mathbb{N}$, bir serisi olarak yani bir kuvvet serisi olarak ifade edilebilir. Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda| > \|a\|$ iken

$$f(\lambda) := (\lambda 1 - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \rightarrow A$ fonksiyonunun analitik olduğu görülür. Burada analitikten kasıt fonksiyonun λ 'nın bir kuvvet serisi olarak yazılabilmesidir. Bunu bildiğimiz klasik anlamda analitik fonksiyon olarak görebilmemiz için f fonksiyonunun herhangi bir $\phi \in A'$ doğrusal sınırlı fonksiyoneli ile bileşkesi olan F fonksiyonuna bakarız: $F : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(\lambda) := \phi((\lambda 1 - a)^{-1}) = \phi\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi(a^n)}{\lambda^n}$$

Bu F fonksiyonunun analitik olduğu açıktır ve $|\lambda|$ büyüdükçe $|F(\lambda)|$ 'nin 0'a yaklaştığı görülür. Yani bu analitik fonksiyonun bütün $\mathbb{C}$ 'ye analitik olarak genişleyememesi gerekir, eğer genişlerse her yerde 0 olması gerekir ki bu mümkün değildir. Bu F fonksiyonunun bütün $\mathbb{C}$ 'ye analitik olarak genişlemesi $\sigma(a) = \emptyset$ olması durumunda mümkündür ki buradan Gelfand'ın $\sigma(a) \neq \emptyset$ olduğunu söyleyen teoremi elde edilir:

Teorem 2.

A birimli bir Banach cebri ve $a \in A$ olsun. O hâlde $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Kanıt. Varsayalım ki $\sigma(a) = \emptyset$ olsun ve $\phi \in A'$ doğrusal sınırlı bir fonksiyonel olsun. Yukarıdaki gibi $F : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$F(\lambda) := \phi((\lambda 1 - a)^{-1}) = \phi\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi(a^n)}{\lambda^n}$$

fonksiyonuna bakalım. Burada $\sigma(a) = \emptyset$ olduğundan $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu bütün $\mathbb{C}$ 'de analitik bir fonksiyondur. Şimdi $|\lambda| > 2\|a\|$ olsun. O hâlde $\|\frac{a}{\lambda}\| < \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\left\| \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^n \right) \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{2}{|\lambda|}$$

olur ki bu durumda

$$|F(\lambda)| = \frac{1}{|\lambda|} \left| \phi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^n \right) \right| \leq \frac{2\|\phi\|}{|\lambda|}$$

elde edilir. Bu da $|\lambda| > 2\|a\|$ iken $F(\lambda)$ 'nin sınırlı olduğunu ve hatta

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} |F(\lambda)| = 0$$

olduğunu verir. Bu durumda F bütün $\mathbb{C}$ 'de analitik olduğundan süreklidir, dolayısıyla $\overline{D(0, 2\|a\|)} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2\|a\|\}$ üzerinde de sınırlıdır. O hâlde F bütün $\mathbb{C}$ 'de analitik ve sınırlı bir fonksiyondur ve bütün $\mathbb{C}$ 'de analitik ve sınırlı bir fonksiyonun sabit olması gerektiğini söyleyen Liouville teoremine göre F sabit olmalıdır, F sonsuzda 0 olduğundan bu sabit de 0 olmalıdır. Burada $\phi \in A'$ keyfi olduğundan $F(\lambda) = \phi((\lambda 1 - a)^{-1}) = 0$ ise Hahn-Banach teoremi gereği $(\lambda 1 - a)^{-1} = 0_A$ olmalıdır ki bu da bir çelişki doğurur, zira A 'nın toplamaya göre birim elemanı 0_A hiçbir zaman tersinir olamaz. Bu çelişki $\sigma(a) = \emptyset$ varsayımımızdan kaynaklandığı için $\sigma(a) \neq \emptyset$ olmalıdır. $\square$

Teorem 2'nin çok önemli bir sonucu da birimli bir Banach cebri aynı zamanda bir bölüm halkası ise yani her sıfır olmayan eleman tersinir ise bu Banach cebrinin $\mathbb{C}$ ile aynı olması gerektiğini söyleyen Gelfand-Mazur Teoremidir:

Teorem 3. (Gelfand-Mazur Teoremi)

A birimli bir Banach cebri olsun öyle ki aynı zamanda bir bölüm halkası olsun, yani $a \in A$ ve $a \neq 0_A$ ise $a \in \mathcal{G}(A)$ olsun. O hâlde $A = \mathbb{C}1_A := \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$ dir.

Kanıt. Herhangi bir $a \in A$ alalım. Teorem 2 gereği $\sigma(a) \neq \emptyset$ olduğundan bir $\lambda \in \sigma(a)$ vardır ki bu da $\lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ demektir. Burada A bölüm halkası olduğundan bu da $\lambda 1 - a = 0_A \Rightarrow a = \lambda 1$ olmasını gerektirir. $\square$

Spektrumla ilgili önemli bir özellik de polinomlar altında değişmez kalmasıdır, yani bir $a \in A$ elemanını bir $p(\lambda) := \sum_{j=0}^n c_j \lambda^j$ polinomunun içerisine koyarak elde ettiğimiz $p(a) = \sum_{j=0}^n c_j a^j$, $a^0 := 1$ elemanının spektrumu $\sigma(p(a))$, $\sigma(a)$ 'nın p altındaki görüntüsü $p(\sigma(a))$ ile aynıdır. Bu özelliğe “Spektral Gönderim Teoremi” (İng. Spectral Mapping Theorem) denir:

Teorem 4. (Spektral Gönderim Teoremi)

A birimli bir Banach cebri ve $p(\lambda) := \sum_{j=0}^n c_j \lambda^j$ bir polinom olsun. O hâlde $p(a) := \sum_{j=0}^n c_j a^j$, $a^0 = 1$ için

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$$

sağlanır.

Kanıt. $\mu \in \sigma(p(a))$ olsun. Ayrıca $q(\lambda) := \mu - p(\lambda)$ olsun. Cebirin temel teoremi gereği $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \neq 0$ vardır ki

$$q(\lambda) = \lambda_0(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

sağlanır. Burada $q(a) := \mu 1 - p(a) \notin \mathcal{G}(A)$ olduğundan ve

$$q(a) = \lambda_0(\lambda_1 1 - a)(\lambda_2 1 - a) \cdots (\lambda_n 1 - a)$$

olduğundan bir $j \in \{1, \dots, n\}$ için $\lambda_j 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ olmalıdır. Bu da $\lambda_j \in \sigma(a)$ olmasını gerektirir. Ayrıca $q(\lambda_j) = \mu - p(\lambda_j) = 0$ olduğundan $\mu = p(\lambda_j)$ ve $\lambda_j \in \sigma(a) \Rightarrow \mu \in p(\sigma(a))$.

$\mu \in p(\sigma(a))$ olsun. Yine $q(\lambda) := \mu - p(\lambda)$ olsun. Yine

$$q(\lambda) = \lambda_0(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

olduğundan bir $j \in \{1, \dots, n\}$ vardır ki $\lambda_j \in \sigma(a)$ sağlanır. Aynı şekilde

$$q(a) = \mu 1 - p(a) = \lambda_0(\lambda_1 1 - a) \cdots (\lambda_n 1 - a)$$

olduğundan $q(a) = \mu 1 - p(a) \notin \mathcal{G}(A)$ olmalıdır, zira eğer $q(a) \in \mathcal{G}(A)$ olsaydı her $j \in \{1, \dots, n\}$ için $\lambda_j 1 - a \in \mathcal{G}(A)$ olurdu. Bu durumda $\mu \in \sigma(p(a))$ olur. $\square$

Bir $a \in A$ elemanının **spektral yarıçapı** $r(a)$:

$$r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

olarak tanımlanır. Burada $\sigma(a) \subset \overline{D(0, \|a\|)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\}$ olduğundan her $a \in A$ için $r(a) \leq \|a\|$ sağlanır. Spektral yarıçapı a 'nın normu $\|a\|$ 'ya bağlayan Beurling'in spektral yarıçap formülü aşağıdaki gibidir:

Teorem 5. (Beurling Spektral Yarıçap Formülü)

A birimli bir Banach cebri ve $a \in A$ olsun. O hâlde

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

sağlanır.

Kanıt. $\lambda \in \sigma(a)$ olsun. O hâlde Spektral Gönderim Teoremi gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ sağlanır. Aynı zamanda $\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$ olduğundan

$$|\lambda^n| = |\lambda|^n \leq \|a^n\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sağlanır. Burada $\lambda \in \sigma(a)$ keyfi olduğundan

$$r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow r(a) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

sağlanır.

$\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda| > r(a)$ olsun. O hâlde $\lambda' := \frac{1}{\lambda}$ için $|\lambda'| < \frac{1}{r(a)}$ ve $1 - \lambda'a \in \mathcal{G}(A)$ sağlanır. Burada $\phi \in A'$ totalım ve $f : D(0, \frac{1}{r(a)}) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) := \phi((1 - za)^{-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(a^n) z^n$$

analitik fonksiyonuna bakalım: Bu fonksiyonun kuvvet serisi her $z \in D(0, \frac{1}{r(a)})$ için yakınsak olduğundan her $\phi \in A'$ ve $z \in D(0, \frac{1}{r(a)})$ için $\{\phi(z^n a^n)\}_{n=0}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ dizisi $\mathbb{C}$ 'de sınırlıdır. O hâlde düzgün sınırlılık prensibi gereği $\{\|z^n a^n\|\}_{n=0}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^+$ dizisi de sınırlıdır. Bu da bir $M > 0$ için $|z| < \frac{1}{r(a)}$ iken

$$\|z^n a^n\| = |z|^n \|a^n\| < M \Rightarrow |z| \|a^n\|^{\frac{1}{n}} < M^{\frac{1}{n}}$$

olmasını gerektirir ki burada $n \in \mathbb{N}$ üzerinden limit alındığında

$$\frac{1}{|z|} > r(a) \Rightarrow \frac{1}{|z|} > \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

elde edilir ki bu da

$$r(a) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

olması demektir. □

4. İDEALLER VE GELFAND DÖNÜŞÜMÜ

A birimli bir Banach cebri olsun. Bir $I \subset A$ altuzayı eğer $a \in A$, $x \in I$ iken $ax \in I$ şartını sağlıyorsa $I \subset A$ 'ya A 'nın bir **sol ideali**, $xa \in I$ şartını sağlıyorsa $I \subset A$ 'ya A 'nın bir **sağ ideali**, hem $ax \in I$ hem de $xa \in I$ şartlarını sağlıyorsa $I \subset A$ 'ya A 'nın bir **ideali** denir. Eğer $I \subset A$ ideali $I \neq A$ ve $I \neq \{0_A\}$ şartlarını sağlıyorsa $I \subset A$ 'ya bir **has ideal** denir.

Eğer $I \subset A$ bir has ideal ise $I \neq A$ olduğundan $I \cap \mathcal{G}(A) = \emptyset$ olmalıdır. Ayrıca $B(1, 1) := \{a \in A : \|1 - a\| < 1\} \subset \mathcal{G}(A)$ olduğundan $B(1, 1) \cap I = \emptyset$ olmalıdır. Bu durumda eğer $I \subset A$ bir has ideal ise $\bar{I} \subset A$ da bir has idealdir ($\bar{I}$, I 'nin kapanışını belirtmektedir).

İdeallerin en önemli örnekleri cebir homomorfizmalarının çekirdek uzaylarıdır: A birimli bir Banach cebri ve B bir cebir olsun, bir $\varphi : A \rightarrow B$ doğrusal fonksiyonuna **cebir homomorfizması** denir eğer her $x, y \in A$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ sağlanırsa. Burada $\varphi : A \rightarrow B$ bir cebir homomorfizması iken $\ker(\varphi) := \{x \in A : \varphi(x) = 0_B\}$ çekirdek uzayının A 'nın bir ideali olduğunu görmek zor değildir. Burada $B := \mathbb{C}$ özel durumunda $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ homomorfizmasına bir **karakter** denir. Bir $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ karakterinin, eğer $\phi \neq 0$ ise, otomatik olarak sınırlı olması gerektiğini, hatta $\|\phi\| = 1$ olması gerektiğini görmek zor değildir: Eğer bir $a \in A$ için $|\phi(a)| > \|a\|$ olsa idi $\|\frac{a}{\phi(a)}\| < 1$ olduğundan $1 - \frac{a}{\phi(a)} \in \mathcal{G}(A)$ olurdu ki bu durumda bir $b \in A$ için $(1 - \frac{a}{\phi(a)})b = b(1 - \frac{a}{\phi(a)}) = 1$ olurdu. Fakat bu da $\phi(1 - \frac{a}{\phi(a)}) = 0$ olduğundan $\phi((1 - \frac{a}{\phi(a)})b) = \phi(1 - \frac{a}{\phi(a)})\phi(b) = \phi(1) = 1 = 0\phi(b) = 0$ gibi bir çelişkiye yol açardı. O hâlde her $a \in A$ için $|\phi(a)| \leq \|a\|$ olmalıdır ki $\phi(1) = 1$ olduğundan $\|\phi\| = 1$ olmalıdır.

Bir $I \subset A$ has ideali başka hiçbir has idealin içerisine girmiyorsa yani bir $J \subset A$ ideali için $J \supseteq I$ iken $J = I$ veya $J = A$ oluyorsa bu $I \subset A$ idealine A 'nın bir **maksimal ideali** denir. Zorn lemması kullanılarak her $I \subset A$ idealinin bir maksimal idealin içerisine girmesi gerektiği gösterilebilir. Ayrıca her has idealin kapanışının da bir has ideal olduğu gözönüne alındığında maksimal ideallerin kapalı olmaları gerektiği kolaylıkla gösterilebilir.

Eğer A birimli bir Banach cebri ve $I \subset A$ onun bir ideali ise $q : A \rightarrow A/I$ bölüm fonksiyonu (İng. quotient map) vasıtasıyla A/I bölüm uzayının bütün idealleri ile A 'nın I 'yi içeren idealleri arasında birebir örten bir eşleme kurulur. Bu eşlemeyi kullanarak eğer $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ bir karakter ise ve $\phi \neq 0$ ise $\ker(\phi) := \{a \in A : \phi(a) = 0\} \subset A$ çekirdek uzayının bir maksimal ideal olması gerektiği gösterilir, zira eğer $\phi \neq 0$ ise $\phi(1) = 1$ olduğundan ϕ örtendir. Ayrıca ϕ bir halka homomorfizması olduğundan halka homomorfizmalarının birinci izomorfizma teoremi gereği $A/\ker(\phi)$ bir halka olarak $\mathbb{C}$ 'ye izomorftur. Bu durumda $\mathbb{C}$ bir cisim olduğundan $A/\ker(\phi)$ de bir cisimdir. Dolayısıyla $A/\ker(\phi)$ 'in hiçbir has ideali yoktur ki bu yukarıda bahsettiğimiz eşleme gereği A 'nın $\ker(\phi)$ 'yi içeren hiçbir has idealinin olmaması gerektiğini gösterir ki bu da $\ker(\phi)$ 'in bir maksimal ideal olması demektir.

Eğer A bir Banach cebri ve $I \subset A$ kapalı bir ideal ise A/I bölüm uzayı da bölüm normu $\|\cdot\|_q$,

$$\|a + I\|_q := \inf\{\|a - x\| : x \in I\}$$

ile bir Banach uzayıdır. Aynı zamanda

$$(a + I)(b + I) := ab + I$$

şeklinde tanımlanan çarpım iyi tanımlı bir halka çarpımıdır. Bu çarpım işlemi ve bölüm normu ile A/I bölüm uzayı bir Banach cebri olur:

Önerme 2.

A bir Banach cebri ve $I \subset A$ kapalı bir ideal olsun. O hâlde A/I bölüm uzayı, bölüm normu ile bir Banach cebridir.

Kanıt. Burada gösterilmesi gereken tek şey

$$\|ab + I\|_q \leq \|a + I\|_q \|b + I\|_q \quad \forall a, b \in A$$

olduğudur: $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun, bölüm normunun tanımı gereği $x, y \in I$ vardır ki

$$\varepsilon + \|a + I\|_q > \|a + x\|, \quad \varepsilon + \|b + I\|_q > \|b + y\|$$

sağlanır. Bu durumda $ay + bx + xy \in I$ olduğundan ve

$$\begin{aligned} \|ab + I\|_q &\leq \|(a + x)(b + y)\| = \|ab + (ay + bx + xy)\| \\ &\leq \|a + x\| \|b + y\| < (\varepsilon + \|a + I\|_q)(\varepsilon + \|b + I\|_q) \end{aligned}$$

olduğundan $\varepsilon \rightarrow 0^+$ alınarak

$$\|ab + I\|_q \leq \|a + I\|_q \|b + I\|_q$$

elde edilir. □

A birimli bir Banach cebri ve $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ bir karakter iken $\ker(\phi) := \{a \in A : \phi(a) = 0\} \subset A$ 'nın bir maksimal ideal olduğunu gördük. Tersine olarak herhangi bir maksimal idealin bir karakterin çekirdek uzayı olması eğer A değişmeli ise mümkündür. Yani A değişmeli ve birimli bir Banach cebri ve $I \subset A$, A 'nın bir maksimal ideali ise bir $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ karakteri vardır ki $I = \ker(\phi) := \{a \in A : \phi(a) = 0\}$ olur: A birimli ve değişmeli bir halka ve $I \subset A$ bir maksimal ideal olduğundan dolayı A/I bölüm uzayı bir cisimdir. Bu durumda Gelfand Mazur Teoremi gereği A/I , $\mathbb{C}$ 'ye izometrik izomorf olmalıdır, yani bir $\psi : A/I \rightarrow \mathbb{C}$ izometrik izomorfizması vardır. Aynı zamanda $q : A \rightarrow A/I$ bölüm fonksiyonu $q(a) := a + I$ bir homomorfizma olduğundan $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi := \psi \circ q$ bir karakterdir ve $I = \ker(\phi)$ sağlanır.

Bir A birimli Banach cebri üzerindeki bütün karakterlerin kümesine A' dual uzayının üzerinden noktasal yakınsamayı koruyan en kaba topoloji olan **zayıf*** topolojisi konur, yani

$$M_A := \{\phi \in A' : \phi \text{ bir karakterdir ve } \phi \neq 0\}$$

iken $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset M_A$ neti için $\phi_\alpha \rightarrow \phi \in M_A$ ancak ve ancak her $a \in A$ için $\phi_\alpha(a) \rightarrow \phi(a)$ sağlanır. Bu topolojiyle $M_A \subset A'$ tıkHz Hausdorff bir topolojik uzay olur. Bu uzaya **karakter uzayı** denir, eğer A değişmeli ise karakterlerin çekirdek uzayları ile maksimal idealler aynı olduklarından dolayı **maksimal ideal uzayı** denir.

Önerme 3.

A birimli bir Banach cebri olsun. O hâlde (M_A, w^) karakter uzayı zayıf* topolojisi ile tıkHz Hausdorff bir topolojik uzaydır.*

Kanıt. Alaoğlu Bourbaki teoremi gereği $\mathbb{B}_{A'} := \{\phi \in A' : \|\phi\| = 1\} \subset A'$ zayıf* topolojisiyle tıkHz Hausdorff bir topolojik uzaydır. Bu durumda M_A 'nın da tıkHz Hausdorff olduğunu göstermek için $M_A \subset \mathbb{B}_{A'}$ 'de kapalı olduğunu göstermek yeterlidir: $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset M_A$ bir net olsun öyle ki $\phi_\alpha \rightarrow \phi \in A'$ zayıf* yakınsasın. Bu durumda $a, b \in A$ ve her $\alpha \in J$ için $\phi_\alpha(ab) = \phi_\alpha(a)\phi_\alpha(b)$ olduğundan $\phi_\alpha(ab) \rightarrow \phi(ab)$ ve $\phi_\alpha(a)\phi_\alpha(b) \rightarrow \phi(a)\phi(b)$ olduğundan $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ olmalıdır, yani $\phi \in M_A$ 'dır. □

Maksimal ideal uzayı ile spektrum arasındaki ilişki A değişmeli iken tam olarak ortaya çıkar:

Önerme 4.

A birimli ve değişmeli bir Banach cebri olsun. O hâlde $a \in A$ iken

$$\sigma(a) = \{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\}$$

sağlanır.

Kanıt. $\{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\} \subseteq \sigma(a)$:

$\lambda \in \{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\}$ olsun, o hâlde bir $\phi \in M_A$ vardır ki $\lambda = \phi(a)$ sağlanır. Eğer $x \in \mathcal{G}(A)$ ise her $\phi \in M_A$ için $\phi(x) \neq 0$ olduğu açıktır zira eğer bir $\phi \in M_A$ için $\phi(x) = 0$ ise $\phi(x^{-1}x) = \phi(1) = 1 = \phi(x^{-1})\phi(x) = \phi(x^{-1})0 = 0$ olur ki bu çelişki her $\phi \in M_A$ için $\phi(x) \neq 0$ olduğunu gösterir. Bu durumda $\phi(\lambda 1 - a) = \lambda - \phi(a) = 0$ olduğundan $\lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ ve dolayısıyla $\lambda \in \sigma(a)$ olmalıdır. (Bu kısmın ispatında A 'nın değişmeli olduğuna hiç değinilmemiş olması dikkate değerdir.)

$\sigma(a) \subseteq \{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\}$:

$\lambda \in \sigma(a)$ olsun. O hâlde $\lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ sağlanır. Bu durumda $I = (\lambda 1 - a)A := \{(\lambda 1 - a)x : x \in A\} \subset A$, A değişmeli olduğundan A 'nın bir has idealidir. Her has ideal bir maksimal ideal tarafından içerildiğinden dolayı bir $J \subset A$ maksimal ideali vardır ki $I = (\lambda 1 - a)A \subseteq J$ sağlanır. Yine A değişmeli olduğundan A 'daki her maksimal ideal bir $\phi \in M_A$ karakterinin çekirdek uzayıdır, yani $J = \ker(\phi)$ dır. Bu durumda $\lambda 1 - a \in J$ olduğundan $\phi(\lambda 1 - a) = \lambda - \phi(a) = 0$ sağlanır, yani bir $\phi \in M_A$ için $\lambda = \phi(a)$ 'dır. $\square$

Şimdi Gelfand dönüşümünün tanımını vermeye hazırız: A birimli ve değişmeli bir Banach cebri ise M_A zayıf $*$ topolojisiyle tıkHz Hausdorff bir topolojik uzaydır, $C(M_A) : \{f : M_A \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ sürekli}\}$ sürekli fonksiyonlar cebri noktasal toplam, noktasal çarpım işlemleri ve

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in M_A\}$$

normu ile bir Banach cebridir. Bu iki cebir A ve $C(M_A)$ arasında A 'yı $C(M_A)$ 'ya götüren doğal bir cebir homomorfizması

$$\Gamma : A \rightarrow C(M_A) \quad \Gamma(a)(\phi) = \hat{a}(\phi) := \phi(a)$$

şeklinde tanımlanır. Bu Γ cebir homomorfizmasına **Gelfand Dönüşümü** denir. Gelfand dönüşümünün sınırlı olduğu ve hatta

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a) \leq \|a\| \quad \forall a \in A$$

şartının sağlandığını görmek zor değildir, zira Önerme 4 gereği

$$\{\Gamma(a)(\phi) : \phi \in M_A\} = \{\phi(a) : \phi \in M_A\} = \sigma(a)$$

olduğundan $\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a)$ sağlanır.

5. C*-CEBİRLERİ VE GELFAND NAIMARK TEOREMİ

Bir A Banach cebri üzerinde (i) her $a, b \in A$ için $(a + b)^* = a^* + b^*$, (ii) her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $a \in A$ için $(\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^*$, (iii) her $a, b \in A$ için $(ab)^* = b^*a^*$ ve (iv) her $a \in A$ için $(a^*)^* = a$ şartlarını sağlayan bir $*$: $A \rightarrow A$ involüsyonu varsa A 'ya bir **Banach* cebri** denir. Bir Banach* cebri A ,

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A$$

şartını sağlıyorsa, A 'ya bir C*-ceбри denir. Bir C*-cebrinin en prototipik örneği H bir Hilbert uzayı olmak üzere

$$B(H) := \{T : H \rightarrow H : T \text{ doğrusal ve sınırlı}\}$$

doğrusal sınırlı operatörler uzayıdır. Buradaki involüsyon bildiğimiz eşlenik almadır yani

$$\langle Tf, g \rangle_H = \langle f, T^*g \rangle_H \quad \forall f, g \in H$$

şartını sağlayan biricik T^* operatörüdür. Ayrıca $\|a^*a\| = \|a\|^2$ aksiyomu

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \quad \forall T \in B(H)$$

olmasından gelmektedir.

Bir C^* -cebri A 'nın birtakım özel elemanları önem kazanmaktadırlar: (i) $a \in A$, $a^* = a$ şartını sağlıyorsa $a \in A$ 'ya **kendine eşlenik** (İng. self adjoint) denir. (ii) $a \in A$, $a^*a = aa^*$ şartını sağlıyorsa $a \in A$ 'ya **normal** denir. Eğer A birimli ise ve $a \in A$, $a^*a = aa^* = 1$ şartını sağlıyorsa $a \in A$ 'ya **birimsel** (İng. unitary) denir.

Bir A C^* -cebrinde $a \in A$ iken $\|a^*a\| = \|a\|^2$ aksiyomu $(a^*)^* = a$ aksiyomu ile birlikte $\|a^*\| = \|a\|$ olması gerektiğini verir zira $\|a^*a\| = \|a\|^2 \leq \|a^*\| \|a\|$ olduğundan $\|a\| \leq \|a^*\|$ olduğu görülür.

Eğer bir C^* -cebri A birimli değilse birimleştirilmesi Banach cebirlerinde yaptığımız gibi $\tilde{A} := \mathbb{C} \oplus A$ olarak yapılır, fakat dikkat edilmesi gereken nokta $(\lambda, a) \in \tilde{A}$ için

$$\|(\lambda, a)\| := |\lambda| + \|a\|_A$$

normu C^* -cebrlerinin $\|a^*a\| = \|a\|^2$ norm aksiyomunu sağlamaz. Onun yerine $\iota : A \hookrightarrow B(A)$, $\iota(a) := M_a$ gömmesinin izometrik olduğu görülür, zira $x := \frac{a^*}{\|a\|}$ için

$$M_a x = \frac{aa^*}{\|a\|}, \quad \|aa^*\| = \|(a^*a)^*\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

olduğundan her $a \in A$ için $\|M_a\| = \|a\|$ sağlanır. Bu $\iota : A \hookrightarrow B(A)$, $\iota(a) := M_a$ gömmesinden gelen norm

$$\|(\lambda, a)\| := \sup\{\|\lambda x + ax\|_A : \|x\|_A \leq 1\}$$

ile $\tilde{A} := \mathbb{C} \oplus A$ birimli bir C^* -cebri olur ve $\iota(a) := (0, a)$, A 'nın $\tilde{A}$ içerisine izometrik bir gömmesidir.

Birimli bir A C^* -cebrinde kendine eşlenik elemanları birimsel elemanlara gönderen üstel fonksiyon sıklıkla kullanılır: $\exp : A \rightarrow A$,

$$\exp(a) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}, \quad a^0 = 1$$

fonksiyonu iyi tanımlı bir fonksiyon olup bu fonksiyona üstel fonksiyon denir. Klasik kalkülüste gördüğümüz e^x fonksiyonunun Banach cebirlerindeki tam karşılığı olan bu fonksiyon $a, b \in A$ için $ab = ba$ ise

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

özdeşliğini sağlar. Ayrıca involüsyon A üzerinde sürekli olduğundan

$$(\exp(a))^* = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right)^* = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a^*)^k}{k!} = \exp(a^*) \quad \forall a \in A$$

sağlanır. Bu durumda $a \in A$ kendine eşlenik ise $(ia)^*(ia) = (ia)^*(ia)$ ve $(ia)^* = -ia$ olduğundan

$$\begin{aligned} \exp(ia)^* \exp(ia) &= \exp((ia)^*) \exp(ia) = \exp(-ia) \exp(ia) = \exp(ia - ia) \\ &= \exp(0_A) = 1 = \exp(ia) \exp(ia)^* \end{aligned}$$

sağlanır, yani $\exp(ia)$ birimseldir. Eğer $a \in A$ birimsel ise $\|a^*a\| = \|1\| = \|a\|^2 = 1$ olduğundan $\|a\| = 1$ olmalıdır. Ayrıca $r(a) \leq \|a\|$ olduğundan eğer $\lambda \in \sigma(a)$ ise $|\lambda| \leq 1$ olmalıdır. Aynı zamanda $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(a^{-1})$ olduğundan ve $a^{-1} \in A$ da birimsel olduğundan $|\lambda| \geq 1$ olmalıdır. Sonuç olarak $a \in A$ birimsel ise $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ olmalıdır. Eğer $\lambda \in \sigma(a)$ ise $e^{i\lambda} \in \sigma(\exp(ia))$ olduğunu görmek de zor değildir:

$$e^{i\lambda} 1 - \exp(ia) = e^{i\lambda} (1 - e^{-i\lambda} e^{ia}) = e^{i\lambda} (1 - e^{-i(\lambda 1 - ia)})$$

$$= e^{i\lambda}(\lambda 1 - a) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} -\frac{(-i)^k(\lambda 1 - a)^k}{(k+1)!} \right)$$

olduğundan $\lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ ise $e^{i\lambda} 1 - \exp(ia) \notin \mathcal{G}(A)$ olması gerekir, yani $e^{i\lambda} \in \sigma(\exp(ia))$ dır.

Bütün bunların sonucu olarak eğer A birimli bir C^* -cebri ve $a \in A$ kendine eşlenik ise $\exp(ia)$ birimsel olduğundan, $\lambda \in \sigma(a)$ iken $e^{i\lambda} \in \sigma(\exp(ia)) \subseteq \mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ olur ki bu da $\lambda \in \mathbb{R}$ olmasını gerektirir. Yani $a \in A$ kendine eşlenik ise $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ olmalıdır. Bunun önemli bir sonucu aşağıdadır:

Önerme 5.

A birimli bir C^ -cebri ve $\phi \in M_A$ A üzerinde bir karakter olsun. O hâlde*

$$\phi(a^*) = \overline{\phi(a)} \quad \forall a \in A$$

sağlanır.

Kanıt. $\{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\} \subseteq \sigma(a)$ olduğunu biliyoruz. Bir $a \in A$ verildiğinde onun kendine eşlenik dekompozisyonu

$$b := \frac{a + a^*}{2}, c := \frac{a - a^*}{2i}, \quad a = b + ic$$

şeklinde yapılır ki burada $b, c \in A$ kendine eşlenik elemanlardır. Bu durumda $\phi(b) \in \sigma(b)$ ve $\phi(c) \in \sigma(c)$ olduğundan $\phi(b), \phi(c) \in \mathbb{R}$ olmalıdır. O hâlde

$$\phi(a^*) = \phi((b + ic)^*) = \phi(b - ic) = \phi(b) - i\phi(c) = \overline{\phi(b) + i\phi(c)} = \overline{\phi(b + ic)} = \overline{\phi(a)}$$

sağlanır. □

En sonunda Gelfand Naimark Teoremini ispatlamaya hazırız:

Teorem 6. (Gelfand Naimark Teoremi)

A birimli ve değişmeli bir C^ -cebri olsun. O hâlde $\Gamma : A \rightarrow C(M_A)$*

$$\Gamma(a)(\phi) := \hat{a}(\phi) = \phi(a)$$

Gelfand dönüşümü bir izometrik izomorfizmadır.

Kanıt. Γ bir izometridir: Eğer $a \in A$ kendine eşlenik ise

$$\|a^*a\| = \|a^2\| = \|a\|^2 \Rightarrow \|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

sağlanır. Beurling spektral yarıçap formülünden bu durumda

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|a^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|a\|$$

elde edilir. Eğer $a \in A$ herhangi bir eleman ise $b := a^*a$ kendine eşleniktir, bu durumda

$$\|\Gamma(b)\|_\infty = r(b) = \|b\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

sağlanır ve ayrıca Önerme 5 gereği

$$\begin{aligned} \|\Gamma(b)\|_\infty &= \sup\{|\phi(b)| : \phi \in M_A\} \\ &= \sup\{|\phi(a^*a)| : \phi \in M_A\} = \sup\{|\phi(a)|^2 : \phi \in M_A\} = \|\Gamma(a)\|_\infty^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \|a\|$$

sağlanır.

$\Gamma(A) = C(M_A)$ olduğunu göstererek ispatımızı bitirelim: $\Gamma(A) \subset C(M_A)$ 'nın bir altceabri olduğu açıktır. Bu altcebir $\Gamma(1) \equiv 1$ sağlandığından sabitleri içerir, ayrıca

$$\Gamma(a^*)(\phi) = \phi(a^*) = \overline{\phi(a)} = \overline{\Gamma(a)(\phi)} \quad \forall \phi \in M_A$$

olduğundan $\Gamma(A)$ kompleks konjügasyonu korur. Eğer $\phi_1, \phi_2 \in M_A$, $\phi_1 \neq \phi_2$ ise bir $a \in A$ vardır ki $\Gamma(a)(\phi_1) = \phi_1(a) \neq \phi_2(a) = \Gamma(a)(\phi_2)$ olduğundan $\Gamma(A)$, M_A 'nın noktalarını ayırır. Bu durumda Stone Weierstrass teoremi gereği $\Gamma(A) \subseteq C(M_A)$ 'da yoğundur, aynı zamanda Γ izometri olduğundan ve A bir Banach uzayı olduğundan, $\Gamma(A) \subseteq C(M_A)$ 'da kapalıdır. Sonuç olarak $\Gamma(A) \subseteq C(M_A)$ 'da hem yoğun hem de kapalı olduğundan $\Gamma(A) = C(M_A)$ olmalıdır. $\square$

■ Kaynaklar

- [1] **Murphy, G. J.** C^* -Algebras and Operator Theory, Academic Press 1990.
- [2] **Zelazko, W.** Banach Algebras, Elsevier 1973.
- [3] **Zhu, K.** An Introduction to Operator Algebras, CRC Press 1993.