

# Epsilon Kadar Yakın: Umudun Matematiği

AYŞENUR ÖCAL

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü  
✉ aysenurocal@hacettepe.edu.tr

**Akademik Danışman:** Doç. Dr. Berke Kaleboğaz  
Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü



Pek çok kişi için gün batımı, bir bitişin ve ardından gelecek olan karanlığın simgesidir. Benim için ise bir bitişten çok, görünürlüğün sınır değiştirdiği bir andır. O an ışık yok olmaz, yalnızca ufku arkasına çekilir.



Şekil 1. 19 Ağustos 2025, Sabancı Üniversitesi, İstanbul

Kendi objektifimden yansıyan yukarıdaki kareyi, Sabancı Üniversitesi'nde katıldığım bir konferans sırasında gün batımında çekmiştim. O dakika, güneşin ufku arkasına çekilirken ışığın tamamen kaybolmadığını, aksine gökyüzünü eşsiz bir renk paletiyle yeniden boyadığını düşünmüştüm. Yaklaşık iki senedir nümerik analiz ile uğraşan bir matematikçi adayı olarak bugün bu kareye yeniden baktığımda, o ânı farklı bir gözle okuyorum. Artık benim için oradaki ufuk çizgisi bir bitiş değil, doğanın matematiksel bir kesinlikle sergilediği yakınsama sürecinin en somut halidir. Çünkü ışık bir anda yok olmaz, adım adım azalır, tıpkı bir yineleme (iterasyon) sürecinde hatanın her adımda biraz daha küçülmesi gibi. Belki de bu yüzden artık o ufka baktığımda, görünmeyene doğru ilerleyen bir süreklilik görüyorum.

Matematik bölümünün kapısından içeri adımımı attığımda, karşımda sınırları görünmeyen bir ufuk vardı. Çözümü hemen bulunamayan problemler, sabır isteyen ispatlar ve zihnimde karşılık bulamayan soyut kavramlarla karşı karşıya kalmıştım. Zamanla anladım ki matematikte önemli olan şey sonuca bir çırpıda ulaşabilmek değil, görünmeyen o ufka doğru yapılan sabırlı bir yolculuktur. İşte umut, tam da bu noktada anlam kazandı. Matematiksel anlamda umut, sonucun henüz görünmemesine rağmen mümkün olduğuna dair duyulan kararlı bir inançtı. Bu inanç, benim için ulaşılan sonuçtan daha anlamlıdır, çünkü her adımda o görünmeyen ufka bir adım daha yaklaştığımı hissetmek belirsizliğe küçük de olsa bir şekil vermektir. İşte o küçük şekillenme, bana vazgeçmemem gerektiğini fısıldar. Dahası, bu fısıltı sadece bana ait değildir. Matematik tarihi, tüm belirsizliklere ve görünmeyene rağmen aynı umut ve kararlılıkla yürümeyi tercih edenlerin hikâyeleriyle doludur. Bu hikâyelerin arasında beni en çok etkileyenlerden biri Andrew Wiles'ın hikâyesidir. Wiles, matematik yapmayı karanlık bir odada ilerlemeye benzetir. Başta hiçbir şey görünmez, duvarlara çarpar, yönümüzü kaybederiz. Fakat bir gün aniden ışık yanar ve o artık karanlıkta dağınık duran tüm parçalar birdenbire görünür hale gelir ve anlamlı bir bütün oluşturur. Gün batımıyla birlikte gökyüzünün yavaş yavaş karanlığa teslim oluşunu izlerken Wiles'ın söz ettiği o ışığı düşündüm. Gece, çözümün bize en uzak görüldüğü zamandır, fakat güneş ertesi gün tekrar doğacaktır. İşte burada matematiğin en sahici umudu saklıdır: Umut, bir mucizeden ziyade aslında kararlı ve sabırlı bir yakınsama sürecidir. Her adımda hatanın biraz daha azaldığını ve görünmeyen o limit noktasına her sabah bir adım daha yaklaştığımı bilmektir.

Umudun matematiksel karşılığı, benim için özellikle nümerik analiz ile tanıştığımda somutlaştı. Nümerik analizde her şeyden önce, elimizdeki problemin bir çözümü olduğunu kabul ederiz. Aksi takdirde yöntemlerimizi uygulamamız mümkün değildir. Bu kabulde birlikte aslında bir tür matematiksel umuda sahip olmuş oluruz. Öte yandan, hata hiçbir zaman tam anlamıyla sıfırlanmaz. Bunun yerine bir tolerans değeri belirler, yaklaşımın kabul edilebilir olduğu bir sınır tanımlarız. O sınır, artık arayışın durabileceği noktayı gösterir. Aslında umut da bir bakıma böyledir: Her şeyin kusursuz olacağına dair bir hayalperestlik değil, epsilon kadar küçük bir hata payıyla yaşamayı kabul edebilen gerçekçi bir duruştur. Umudun bu gerçekçi biçimini, yinelemeli yöntemlerde belki de en somut haliyle görebiliriz. Yinelemeli yöntemlerde çözümün kendisiyle değil, bir başlangıç tahminiyle yola çıkarız. Umut burada en saf hallerinden birine bürünür: Çözümü bilmeden, elimizdeki kısıtlı verilerle o ilk adımı atma cesareti. Seçtiğimiz başlangıç tahmini çoğu zaman çözümden oldukça uzaktır. Ancak burada kusursuz bir başlangıç beklersek algoritmalarımızı çalıştıramayız, yani sürece başlayamayız. Bu nedenle yinelemeli yöntemler ideal bir noktadan değil, cesur bir başlangıçtan beslenir. İşte yineleme sürecinin en temel motivasyonu da umudun verdiği cesarettir.

Hata yapmak hayatın bir parçasıdır. Çoğu insan için hata bir sonu veya başarısızlığı temsil ederken nümerik analizde hata, sürecin en önemli parçasıdır, çünkü bir sonraki adımın yönünü belirleyen en değerli veridir. Hayatta da durum bundan farklı değildir. Yaptığımız hatalar bize nerede olduğumuzdan ziyade, bundan sonra nasıl ilerlememiz gerektiğini gösterir. Kusursuz olmak zorunda değiliz. Bugün yaptığımız hatalar dünkünden epsilon kadar bile küçükse bu, aslında doğru yolda olduğumuzun bir göstergesidir. Bu yüzden bir matematikçi adayı olarak çalışma masamın başında geçirdiğim sonuçsuz saatleri boşa geçmiş bir zaman olarak değil, aksine bir kazanç olarak görürüm. Çünkü artık pusulam elimdedir ve bir sonraki adımım için ipuçlarına sahibimdir. Çözüme belki hemen ulaşamayabiliriz. Ama her adımda ona biraz daha yaklaştığımızı bilmek, matematiğin bize sunduğu en gerçekçi umuttur.

Umut, matematikte yeni bir yol arayışı olarak da karşımıza çıkar. Bazen herkesin kullandığı, kitaplarda yer alan klasik yöntemler bizi çözüme götürmez; hatta sistemi çıkmaza sürükler. Bu gerçeği en açık hâliyle, son zamanlarda üzerinde çalıştığım Standart Olmayan Sonlu Farklar (NSFD) yaklaşımında deneyimledim. Bu yaklaşımı ve ortaya koyduğu sonuçları gözlemlemek, üzerine düşünmek benim için teknik bir ayrıntıdan çok, güçlü bir motivasyona dönüştü. Çünkü Standart Olmayan Sonlu Farklar yaklaşımı bize şunu söyler: Eğer alışılmış yollar seni çıkmaza sürüklüyorsa pes etmek yerine, elindeki problemin kendi dinamiğine uygun, daha önce denenmemiş özgün bir yaklaşım geliştirmelisin. Buradaki “standart olmama” durumu, var olanla yetinmemeyi ve daha iyiye ulaşma umudunu temsil eder. Bu arayış bir hayalden değil, çözümün bir yerde var olduğuna dair duyulan inançtan doğar. Standart yöntemlerin verimli olmadığı yerde kendi yolunu inşa etmek, umudun eyleme dönüşmüş halidir.

Yazımın başındaki o gün batımına geri dönecek olursam, ışığın aslında neden hiç kaybolmadığını daha iyi anlıyorum. O, yalnızca ufuk çizgisinde incelererek başka bir forma bürünür. Ufuk çizgisi ise bir son değil, tıpkı yakınsama sürecinde olduğu gibi yavaş yavaş gerçekleşen bir dönüşümün eşiğidir. Tıpkı çözüme bir anda ulaşamayıp adım adım yaklaştığımız gibi... Bir matematik đrencisi olarak umut benim için karanlıkta bile yönümü kaybetmeden yryebilmektir. Hata yapa yapa ilerlemek, bunun bilincinde olmak ve ipuçlarını takip etmektir. zmn bir yerde var olduğuna inanarak vazgememektir. Gremesem bile varlığına güvenmek, ulaşamasam bile süreçte kalıp ilerlemeye devam etmektir.