DÜNYA MATEMATİK GÜNÜ 2026 ÖZEL SAYISI: *MATEMATİK VE UMUT*

Gordion Düğümü

RAZİYE GAZAN

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü
raziyegazan@std.iyte.edu.tr

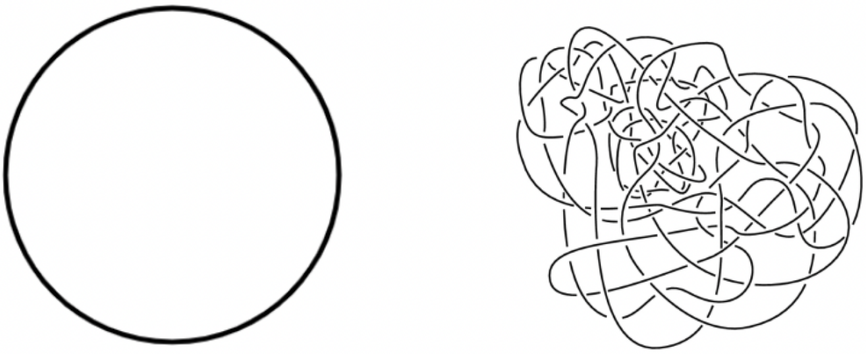
Akademik Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Neslihan Gügümcü
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü

Antik Frigya'nın başkenti Gordion'da bulunan ve çözülmesi imkânsız gibi görünen efsanevi bir düğüm, yüzyıllar boyu bir bilmece olarak kalır. Halatlarının uçları gizlenmiş bu karmaşık düğümü kim çözmeyi başarırsa, tüm Asya'nın hâkimi olacaktır. Bir doğu seferinde Gordion'a gelen Büyük İskender, yayılan kehaneti duyar ve düğümü çözmeye çalışır. Elindeki yöntemlerin ve bilgilerin yetersizliğiyle düğümü çözemeyeceğini anlayınca bir kılıç darbesiyle düğümü ikiye böler. Bu pragmatik yaklaşım, çözümün kendisinin bile bazen cesaret gerektirdiğini gösterir. İskender'in kılıcı, topolojik bir kural ihlali gibi görünse de aslında umudun en radikal halidir: bakış açısını kökten değiştirmek.

Şekil 1. (Jean-Simon Berthélemy, Alexander Cutting the Gordian Knot, 18. yüzyıl.)

Gordion Düğümü mitinden yola çıkarak, matematikte görünüşte imkânsız olan problemlere yaklaşmanın yolu bilgi, yöntem, cesaret ve umuttur. Karmaşık ve zor problemlerin çözümünün imkânsız olduğu anlamına gelmez. Matematiksel tanım olarak **düğüm (knot)**, üç boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ içinde düzgün ve birebir gömme ile yerleştirilmiş bir çemberdir. Çemberin kendisi **trivial düğümdür (unknot)**. Düğüm teorisi çerçevesinde, İskender'in kılıcının hareeti, düğümü "unknhâlehale getirir. Düğüm teorisindeki temel konulardan biri, bir düğümün bütünlüğünü bozmadan çözülüp çözülemeyeceğidir. Bunun için öncelikle problemi anlamak gerekir. Umut, karmaşıklığı fark etmekle başlar, çözümün varlığı ve erişilebilirliğiyle devam eder.

20. yüzyılın en önemli topologlarından biri olan Wolfgang Haken, Herhangi bir düğümün çözülüp çözülemeyeceğine dair bir algoritma geliştirdi. Haken, "Normal Yüzeyler" teorisiyle, düğümün etrafındaki 3 boyutlu uzayı küçük parçalara ayırarak, bu parçaların içinde düğümün aslında basit bir halka olduğunu



Şekil 2. Sol: Trivial düğüm (unknot), Sağ: Haken-Gordian düğümü.

kanıtlayan bir yapının olup olmadığının tespit edilebileceğini ortaya çıkarttı. Örneğin, Şekil 2'deki Haken Gordian Düğümü ile çember aynı yapıdadır: çözülmüş düğüm. Bazen çözüm, onu çevreleyen koşullarda, fark etmediğimiz detaylarda ve bakış açımızda gizlenir.

Bir düğümün karmaşıklığı, diyagramatik olarak **düğüm geçiş sayısıyla (crossing number)**, topolojik olarak **cins (genus)** gibi izotopi sınıfına bağlı değişmezlerle, cebirsel olarak ise **düğüm gruplarıyla** ve **polinom invariantlarıyla** incelenebilir. Bir düğümün çözülebilirliği için öncelikle uygun bir diyagrama ihtiyaç vardır. Yanlış temsil problemi çözülemez kılar. **Reidemeister hareketleri** ile düğüm diyagramını sadeleştirilir. Düğümün karmaşık olması, topolojik olarak karmaşık olduğunu göstermez. Çözüme pusula olabilecek bilgiler elde edilirse, karmaşıklık bile umut yaratır. S^3 (üç-boyutlu küre) içerisindeki K düğümleri için **çözülme sayısı (unknotting number)** $u(K)$, en temel karmaşıklık ölçütlerinden biridir. Bu sayıya **Gordion sayısı** da denmektedir. Büyük İskender'in düğümü çözebilmek için kılıcıyla yapması gereken en az hamle sayısını temsil eder. K düğümünün diagramını izotopi ile destekleyerek unknot diagramına dönüştürmek için gereken minimum **geçiş sayısı (crossing number)** olarak tanımlanır. Çözülme sayısı düğümler için bir değişmediyagramına düğümün diagramına değil, topolojisine bağlıdır. Bazı düğümler bir çembere eşdeğer olabilirken, bazıları karmaşık bir dolanıklığa sahip olabilir.

$u(K) = 0$ ancak ve ancak K trivial düğümdür. En basit düğümlerden biri olan üç geçişli trefoil için çözülme sayısı $u(K) = 1$'dir. 3 geçişten sadece birini değiştirmek düğümüçözer. Lokal bir hamle, global yapıyı tamamen değiştirebilir.

"Her düğümün sonlu bir düğüm çözme sayısı vardır." Herhangi bir düğüm izdüşümünde, kesişimleri uygun şekilde değiştirerek her zaman basit düğüm elde edilebilir. Bu teorem bir umut metaforudur. Bir düğümün n kesişimli bir izdüşümünde, hangi kesişimleri değiştireceğine karar vermek için 2^n olasılık vardır. $n = 10$ için bu sayı 1024, $n = 20$ için ise 1 milyondan fazladır. Hâlâ bugün, çözülme sayıları bilinmeyen 9 tane 10-kesişimli asal düğüm bulunmaktadır. Umudun kaynağı bilinmeyendir ve matematik umudun somutlaştığı bir yerdir.

■ Kaynaklar

[1] Adams, C. C. (2004). *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society.

[2] Brittenham, M. ve Hermiller, S. (2025). *Unknotting Number Is Not Additive Under Connected Sum*.

[3] Calegari, D. (2023). Almost Sufficiently Large. *Notices of the American Mathematical Society*.

[4] Wikipedia. (2026). Gordian Knot. Erişim Adresi: https://en.wikipedia.org/wiki/Gordian_Knot