

HACETTEPE LİSANS

MATEMATİK

DERGİSİ



Akademik Yazılar / Öğrenci Yazıları / Matematik Söyleşileri / Matematğin İzinde
Kitaplar / Erasmus Günlükleri / Mesleğe İlk Adımlar / Mezun Hikâyeleri

İçindekiler

2	Editörden Mektup <i>Orhan Oğulcan Tuncer</i>
4	Matematik ve Umut <i>Pınar Aydoğdu</i>
6	Oy Çokluğuna Dayalı Kararlar Üzerine <i>Ümit Işlak</i>
14	Hayatın Koordinatları <i>Gülizar Nehir Gülkanat</i>
17	Bir Çarpışmanın Anatomisi: Güvercin Yuvası İlkesi, Doğum Günü Paradoksu ve Dijital Doppelgängerler <i>Esra Korkmaz</i>
22	Fuzzy Yaşantılarımızda Fuzzy Kümeler <i>Damla Nigar</i>
27	Matematik Söyleşileri <i>Selcan Şenyurt</i>
36	Doğruyu Ararken Yanılgılarla Karşılaşmak: Analizde Karşı Örnekler I <i>Eylem Öztürk</i>
44	Bir Sanat Olarak Matematik: Shakespeare Denklemleri <i>Berkay Atlı</i>
49	Markov–Monte Carlo Stokastikliği ve Deterministik Model: Aynı Dinamiğin İki Yüzü <i>Derya Altıntan</i>
56	Mutlu Hatanın Kanat Çırpışı: Kelebek Etkisi ve Kaos Teorisi <i>Batuhan Demirbaş</i>
62	Matematiğin İzinde Kitaplar <i>Pınar Aydoğdu</i>
69	Gauss Tamsayıları ve Cebirsel Tamsayı Halkaları <i>Bülent Saraç</i>
77	Fraktal Geometri Üzerine Bir İnceleme <i>Kübra Çelik</i>
86	Harry Houdini: Bir Sihirbaz mı, Yoksa Bir Matematikçi mi? <i>Elif Medetoğulları</i>
96	Değişmeli Banach Cebirlerinin Gelfand Teorisi <i>Uğur Gül</i>
109	Matematik Yapabiliyor (muy)um!! <i>Nazan Sezen Yüksel</i>
114	Matematiğin Aynasında Bilinçdışı: Mantıktan Topolojiye Bir Yolculuk <i>Ahsen Irmak Koca & Ekin Ever</i>
118	Erasmus Günlükleri
120	Mesleğe İlk Adımlar
124	Mezun Hikâyeleri

Editörden Mektup



Değerli Okurlarımız,

Hacettepe Lisans Matematik Dergisi'nin ikinci sayısı ile yeniden sizlerle buluşmanın mutluluğunu yaşıyoruz. İlk sayıyı yayımlarken içimizde hem bir heyecan hem de doğal bir belirsizlik vardı. Bir fikri somut bir yayına dönüştürmek, onu sürdürülebilir kılmak ve gerçekten bir karşılık bulduğunu görmek zaman gerektiriyor. Bu ikinci sayı, o ilk adımın bir heves değil, kalıcı bir niyet olduğunu gösteriyor.

Bu süreçte önemli bir adım daha attık ve dergimiz için bir Editör Kurulu oluşturduk. Artık dergimizin değerlendirme ve yayın süreçleri daha kurumsal bir yapı içinde yürütülecek. Editör Kurulumuzda yer alarak sorumluluk üstlenen, yazıların titizlikle incelenmesine emek veren, dergimizin akademik niteliğini güçlendiren ve bu sayının hazırlanmasında önemli rol üstlenen Esra Korkmaz, Eylem Öztürk, Hacer İlhan ve Pınar Aydoğdu hocalarımıza gönülden teşekkür ederim.

Bir diğer önemli gelişme ise dergimizin web sayfasının yayına açılması. Bundan böyle yazı başvuruları web sitemiz üzerinden alınacaktır. Gönderilen her yazıya bir editör atanacak, yazılar hakem değerlendirmesine tabi tutulacaktır. Değerlendirme sonuçları ve varsa hakem görüşleri yine sistem üzerinden yazarlara iletilecek ve gerekli durumlarda revizyon talep edilecektir. Böylece hem şeffaf hem de akademik ölçütlere dayalı bir yayın süreci işletmeyi hedefliyoruz. Dergimizin gelişimi için bu adımın önemli olduğuna inanıyoruz.

Bu sayıda ayrıca yeni bir bölüm başlatıyoruz: "Mesleğe İlk Adımlar". Bu bölümde staj yapan öğrencilerimiz, deneyimlerini kısaca aktararak henüz yolun başında olan arkadaşlarına bir perspektif sunacaklar. Matematik eğitiminin yalnızca teorik bir birikim olmadığını; farklı sektörlerde, farklı alanlarda nasıl karşılık bulduğunu somut örneklerle görmek istiyoruz. Umuyoruz ki bu paylaşımlar, öğrencilerimizin gelecek planlarına ışık tutar.

Bu sayıda ayrıca yeni bir bölüm başlatıyoruz: "Mesleğe İlk Adımlar". Bu bölümde staj yapan öğrencilerimiz, deneyimlerini kısaca aktararak henüz yolun başında olan arkadaşlarına bir perspektif sunacaklar. Matematik eğitiminin yalnızca teorik bir birikim olmadığını; farklı sektörlerde, farklı alanlarda nasıl karşılık bulduğunu somut örneklerle görmek istiyoruz. Umuyoruz ki bu paylaşımlar, öğrencilerimizin gelecek planlarına ışık tutar.

14 Mart Uluslararası Matematik Günü'nün bu yılki teması "Matematik ve Umut". Matematik kesinlik, ispat ve doğrulukla anılır, bu sebeple aynı zamanda insan aklının en güçlü umut biçimlerinden biridir. Karmaşık görünen bir problemin çözülebileceğine inanmak, henüz bilinmeyen anlamlandırmaya çalışmak ve sabırla düşünmeye devam etmek... Tüm bunlar, aslında umudun entelektüel bir ifadesidir. Fields madalyalı matematikçi Maryam Mirzakhani'nin çok güzel ifade ettiği gibi: "Matematiğin güzelliği, ancak daha sabırlı takipçilerine kendini gösterir." Bu sabır, içinde her zaman bir gün o güzelliği görebilme umudunu barındırır.

Matematik, çözümsüz gibi duran bir sorunun bile anlaşılabilir bir düzen taşıdığına inanmayı ve o düzeni ortaya çıkarana kadar düşünmeye devam etmeyi öğretir. Fermat'ın Son Teoremi'ni yıllar süren bir emeğin ardından çözen Andrew Wiles, matematiksel keşif sürecini karanlık bir malikaneye girmeye benzetir: "Aylarca, hatta yıllarca karanlıkta tökezleyerek dolaşırsınız... Mobilyaların nerede olduğunu yavaş yavaş öğrenirsiniz. Sonunda ışık düğmesini bulursunuz ve birden her yer aydınlanır." İşte o odada aylarca karanlıkta kalmaya dayanabilme gücü ve o ışık düğmesini eninde sonunda bulma inancı, umudun ta kendisidir.

Belki de bu yüzden matematik, yalnızca bir bilim değil, aynı zamanda ısrarlı bir umut disiplini. David Hilbert'in o meşhur meydan okuyuşu da bu tavrı yansıtır: "Bilmeliyiz. Bileceğiz." Ya da yine Andrew Wiles'tan alıntılacak olursak: "Bir çözüm bulamıyor olmamız, çözümün olmadığı anlamına gelmez." Bir matematikçi, en çözümsüz görünen problemin karşısında bile bu inancı koruyan ve umudu tekrar tekrar inşa eden kişidir.

Uluslararası Matematik Günü kapsamında, detaylarını Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü web sayfası (mat.hacettepe.edu.tr) ve Instagram sayfasında ([hacettepe_matematik_resmi](https://www.instagram.com/hacettepe_matematik_resmi)) duyurduğumuz bir makale yarışması düzenliyoruz. Bu yarışma sonucunda seçilen makaleler, dergimizin bir sonraki sayısında

yayımlanacak. Bu yarışmanın, öğrencilerimizi araştırmaya, yazmaya, yaratıcı düşünmeye ve düşüncelerini daha sistematik biçimde ifade etmeye teşvik edeceğine inanıyoruz.

Hacettepe Lisans Matematik Dergisi'ni yılda iki sayı olarak yayımlamaya devam ediyoruz. Amacımız matematiği anlaşılır, merak uyandırıcı ve paylaşılabılır bir dille konuşmaya devam etmek. Sizlerin katkısı ve ilgisiyle bu derginin her sayıda biraz daha güçleneceğine inanıyorum. Dergimizin ortaya çıkışından bu yana desteklerini esirgemeyen Bölüm Başkanımız Prof. Dr. İsmet Yurduşen'e ve Bölüm Başkan Yardımcımız Prof. Dr. Sultan Eylem Toksoy'a şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu sayının hazırlanmasında bize destek olan, fikirleriyle katkı sunan, yazılarıyla dergiyi zenginleştiren tüm akademisyenlerimize, öğrencilerimize ve mezunlarımıza içtenlikle teşekkür ederim.

Hepinize keyifli ve ilham verici okumalar diliyorum.

Dr. Orhan Oğulcan Tuncer
22 Şubat 2026, Ankara

Matematik ve Umut

PINAR AYDOĞDU

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ paydogdu@hacettepe.edu.tr



Antik Yunan filozofu Thales, binlerce yıl öncesinden bize şöyle seslenir: “Umut, insanlığın sahip olduğu en evrensel şeydir.” Bugün, bu köklü düşüncenin yanına modern dünyanın en güçlü ortak dilini, yani matematiği koyuyoruz. Her yıl 14 Mart’ta –pi sayısının (3,14) o meşhur gizemine atfen– dünya çapında kutladığımız Uluslararası Matematik Günü (IDM), bu yıl tam da bu noktaya, matematik ve umudun kesişimine odaklanıyor. UNESCO tarafından 2019’da resmileştirilen ve Uluslararası Matematik Birliği’nin öncülüğünde, müzelerden sınıflara kadar küresel bir şölene dönüşen bu gün, sadece bir kutlama değil; aynı zamanda bir hatırlatmadır. Matematik, karmaşık veriler ve belirsizlikler dünyasında bize “anlaşılabilir bir gerçeklik” vadederek umut aşılar; bize iş birliğini, ortak tanımlarda buluşmayı ve kazan-kazan stratejilerini öğretir.

Matematik ve umut, ilk bakışta birbirine zıt gibi görünen (biri kesinlik ve mantık, diğeri belirsizlik ve duygu) ancak derinlemesine incelendiğinde birbirini besleyen iki güçlü kavramdır. Matematik, kaosu içinde bir düzen arayışındır ve bu arayışın kendisi, “bir çözümün var olduğuna inanmak” anlamında saf bir umuttur.

Matematik tarihindeki en büyük “umut” beyanı, ünlü Alman matematikçi David Hilbert’e aittir. 1900’lerin başında bazı düşünürler “bazı şeylerin asla bilinmeyeceğini” savunurken, Hilbert buna şiddetle karşı çıkmıştır: “Wir müssen wissen. Wir werden wissen.” (Bilmeliyiz. Bileceğiz.) Bu söz, insan zihninin her türlü matematiksel problemi çözebileceğine dair sarsılmaz bir inancı ve umudu temsil eder. Hilbert’in mezar taşında da bu yazar. Bu, pes etmemenin ve aklın gücüne duyulan umudun bir mantrasıdır adeta.

Birçok matematikçi için matematik, dış dünyanın (savaşların, hastalıkların, politik kaosun) belirsizliğine karşı güvenli bir liman olmuştur. Dünya karmaşık ve adaletsiz olabilir ama $e^{i\pi} + 1 = 0$ her zaman doğrudur ve güzeldir. Güzellik de insanın içini kıpırdatıp bir umut kapısı aralamaz mı? Bertrand Russell, gençliğinde yaşadığı derin mutsuzluktan bahsederken, onu intihardan alıkoyan şeyin “biraz daha fazla matematik öğrenme arzusu” olduğunu belirtmiştir. Matematik onun için dünyevi dertlerden arınmış, “ciddi bir güzellik” sunan bir umuttu.

Matematik, sonlu bir zihne sahip insanın “sonsuzluğu” kavrayabilmesini sağlar. Georg Cantor’un sonsuzluklar üzerine yaptığı çalışmalar, insanın sınırlı varoluşunu aşıp “mutlak” olana dokunma çabasıdır. Cantor için bu neredeyse dini bir umuttu. O, zihnin sınırsız özgürlüğünü kanıtlıyordu.

Öte yandan, Kurt Gödel’in Eksiklik Teoremi, matematikte bile ispatlanamayacak doğrular olduğunu gösterdi. Bu başta karamsar gelebilir ama aslında sistemin her zaman “daha fazlasına” açık olduğunu, bitmemişliğin getirdiği sonsuz bir keşif umudunu simgeler. İlk bakışta karamsarlığa düşmemize sebep olacak başka bir matematiksel olgu da Kaos Teorisi ve fraktallar olabilir. Ancak, örneğin Kelebek Etkisi veya Lorenz Çekicileri, karmaşık ve öngörülemez görünen sistemlerin altında yatan gizli bir düzen olduğunu gösterir. Bu, hayata dair güçlü bir metafordur aslında: Şu an hayatımız kaotik görünse de, büyük resimde matematiksel bir estetik ve düzen olabilir. Bu düşünce, belirsiz zamanlarda insana umut verir: Kaostan düzen çıkarma umudu.

Günümüz matematikçilerinden Andrew Wiles’ın Fermat’ın Son Teoremi’ni kanıtlamak için 7 yıl boyunca tavan arasında tek başına çalışmasını sağlayan tek şey, yüzyıllardır kimsenin bulamadığı o yolun var olduğuna dair duyduğu umuttu. Yine günümüzden bir örnek verecek olursam, Amerika Matematik Derneği eski başkanı Francis Su, “Mathematics for Human Flourishing” (İnsanlık İçin Matematik, TÜBİTAK Yayınları, 2024) adlı kitabında umudu temel bir matematiksel erdem olarak ele alır. Su’ya göre, zor bir matematik problemiyle boğuşmak bize umut etmeyi öğretir. Çözümü henüz göremesek bile, mantıklı bir yolun var olduğuna inanarak karanlıkta ilerleriz. Onun için “Matematiksel umut, sadece bir dilek değildir; sıkı çalışmanın sonunda bir atılımın geleceğine dair bir beklentidir.”

Yazımı noktalamadan önce umut ile iyimserliğin birbirinden farklı olduğunu belirtmek isterim. İyimserlik, pasiftir; bir bekleyişi simgeler bana göre. Umut ise aktiftir; ulaşmayı hedeflediğimiz noktaya giden yoldaki çabamızı besler. Hareketimizi sağlayan bir yakıttır. Hayatta da matematikte olduğu gibi, doğruluğunu ispatlayamasak da doğru kabul ettiğimiz başlangıç noktalarına (aksiyomlara/inançlara) ihtiyacımız vardır. Umut da işte tam bu noktada hayatın temel aksiyomudur.

Oy çokluğuna dayalı kararlar üzerine

ÜMIT IŞLAK

Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ umit.islak1@bogazici.edu.tr



1. Giriş

Bir grup insan olarak doğru ya da yanlış olabilecek bir karara varmak üzereyiz. Çoğunluğun kararını takip edersek mi yoksa gruptan rastgele bir kişiyi seçip onun dediğini takip edersek mi doğru karara ulaşma olasılığımız daha yüksek olur? Bu yazıda bu sorunun etrafında düşüneceğiz. Başlangıç noktamızsa şu bulmaca olacak.

(Ailenin kararı) Üç kişilik bir aile düşünelim. Bu aile önemli bir karar vermenin arifesinde ve kararları ya doğru ya da yanlış olacak. Ailedeki her bir kişinin doğru kararı vermesi olasılığı birbirine eşit ve bu olasılık $p \in (0, 1)$.

Üç kişinin de kararı duyulup çoğunluğun kararına uyulursa doğru kararın çıkması olasılığı ne olur? Bu olasılık p 'den büyük müdür, küçük müdür?

Bu bulmacanın çözümüne hemen bir sonraki bölümde bakacağız. Öncesinde, ailenin nihai karara ulaşmak için aralarından birini rastgele seçtiği ve onun seçiminde karar kıldığı alternatif duruma hemen bakabiliriz. Bu durumda ailenin doğru karara varma olasılığı,

$$\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p = p$$

olur; zira üç kişiden herhangi birini $1/3$ olasılıkla seçiyoruz ve bunu takiben bu kişi p olasılıkla doğru karara varıyor. Yani aslında bulmacadaki asıl merak ettiğimiz şey, çoğunluğun kararını takip edip doğruya ulaşma olasılığının rastgele bir kişinin kararını takip edip doğruya ulaşma olasılığından daha büyük olup olmadığı. Bir başka deyişle, çoğunluğun karar vermesiyle doğruya ulaşma olasılığımız acaba p 'den büyük müdür?

Bir sonraki bölüme geçmeden önce içgüdüsel olarak bulmacanın cevabının p 'den büyük mü, küçük mü olacağını düşünmek sizin için faydalı olacaktır. Unutmadan, bu büyüklük küçüklük meselesi p 'nin değerine bağlı olabilir!

2. Ailenin kararı

Belirli bir $p \in (0, 1)$ için ailedeki her bir kişinin doğru kararı vermesi olasılığının birbirine eşit ve p olduğunu varsaymıştık. Üç kişinin de kararını duyup çoğunluğun kararına uyarsak aileden doğru kararın çıkması olasılığıyla ilgileniyorduk. Bu bölümde bu sorunun cevabına ulaşip sonraki bölümde bir genelleştirmeye bakacağız.

Ailedeki üç kişiyi birinci, ikinci ve üçüncü kişiler olarak düşünebiliriz. Öncelikle, bu üç kişiden her birinin verdiği doğru ve yanlış kararı D ve Y olarak kısaltırsak $2^3 = 8$ farklı durum olabileceğini gözlemleyelim:

$$DDD, DDY, DYD, YDD, YYD, YDY, DYY, YYY.$$

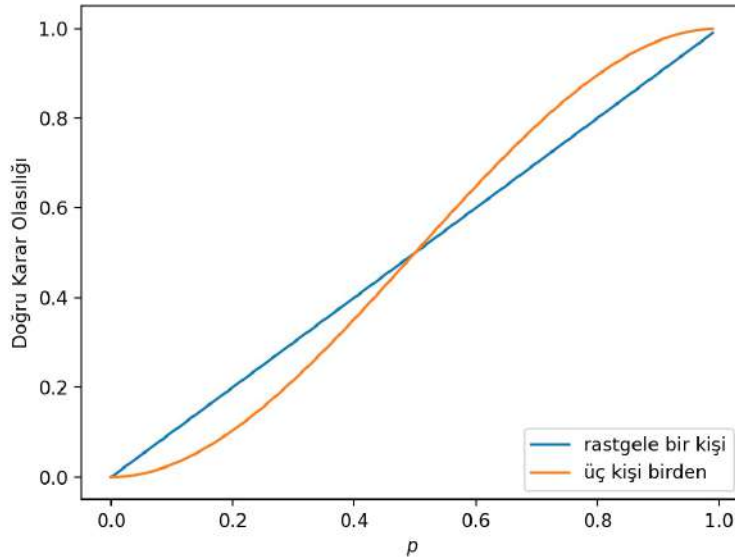
Örneğin DDY , ilk iki kişinin doğru, üçüncünün yanlış karar verdiği durumu gösteriyor.

Çoğunluğun kararına uyulduğuna göre, bu sekiz durumdan DDD, DDY, DYD ve YDD nihai olarak doğru karara varmamızı sağlamakta. Bunlardan DDD 'nin olasılığı p^3 . DDY 'nin olasılığı $p \cdot p \cdot (1 - p) = p^2 \cdot (1 - p)$. Benzeri şekilde DYD ve YDD 'nin olasılıkları da $p^2 \cdot (1 - p)$. Karşılık gelen bu olasılıkları topladığımızda $p^3 + 3p^2(1 - p)$ buluyoruz. Yani çoğunluğun kararına uyarsak doğru karar verme olasılığı

$$\phi(p) := p^3 + 3p^2(1 - p)$$

değerine eşitmiş.

Python'da kısacık bir kod yazarak oluşturulan aşağıdaki şekilden görüleceği üzere $\phi(p)$ değeri, $p < 0,5$ 'ken p 'den küçük çıkarken, $p > 0,5$ 'ken p 'den daha büyük çıkmaktadır. O halde $p < 0,5$ 'ken rastgele bir kişinin kararını takip etmek, doğru kararı verme olasılığını artırıyor! Yani insanlar bireysel olarak hata yapmaya meyillilerse oy çokluğuna göre hareket edince hata yapmaya daha da meyilli oluyorlar!



$p < 0,5$ durumunda $\phi(p) < p$ olduğunu şekil üzerinden gördük ama dilersek bunu cebirsel olarak da gösterebiliriz. Tek yapmamız gereken $\phi(p) < p \Leftrightarrow p^3 + 3p^2(1 - p) < p \Leftrightarrow p^3 + 3p^2(1 - p) - p < 0 \Leftrightarrow p(2p^2 - 3p + 1) > 0$ olduğunu gözlemlemek ve en sondaki eşitsizliğin $p < 0,5$ olduğunda sağlandığı sonucuna varmak.

Buradaki şaşırtıcı olan ve peşine düşeceğimiz gözlemimizi bir kez daha vurgulayalım.

Ailedeki üç kişiden her birinin doğru karara varma olasılığı $0,5$ 'ten küçük bir değere eşitse, oy çokluğuna göre hareket ettiklerinde yanlış karara varma olasılıkları, rastgele bir aile bireyinin yanlış karara varma olasılığından daha büyüktür.

Önümüzdeki bölümde bu gözlemi üç kişi yerine daha fazla kişi olsaydı durumuna genelleştirecek, sonrasında da bireylere karşılık gelen olasılıklar farklı olsaydı ne olurdu sorusuna bakacağız. Bu bölümü size benzeri bir soruyu alıştırmaya bırakarak bitirelim.

Alıştırma. İki çeşit jüri düşüneceğiz.

- Birinci çeşit jüri üç kişiden oluşsun. Jüri üyelerinden ikisinin doğru karar verme olasılıkları p değerine eşit. Üçüncü üyenin doğru karar verme olasılığı ise $1/2$. Jürinin nihai kararı da çoğunluğun kararı olsun.
- İkinci çeşit jüri ise doğru kararı verme olasılığı p olan sadece bir kişiden oluşsun.

Hangi jüri çeşidinin doğru kararı vermesi olasılığı daha yüksektir? (Cevap: İkisinde de aynıdır.)

3. Daha genel bir problem

Önceki bölümde üç kişilik bir aile üzerinden tartıştığımız sorunun doğal bir genelleştirmesi var. Ailede üç yerine daha fazla kişi olsaydı ne olurdu? Bir ailedeki birey sayısının alabileceği birey sayısı kısıtlı olduğu için sorunun şimdiki halini bir toplum üzerinden düşünelim. Dileyenler toplumsal olarak verilmesi gereken bir kararı kafasında canlandırıp durumu daha da somutlaştırabilir.

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $2m + 1$ bireyden oluşan bir toplum düşünelim. Bu toplum önemli bir karar verme arifesinde ve kararları ya doğru ya da yanlış olacak. Toplumdaki her bir kişinin doğru kararı vermesi olasılığı birbirine eşit ve bu olasılık $p \in (0, 1)$.

$2m + 1$ kişinin de kararını duyup çoğunluğun kararına uyarsak doğru kararın çıkması olasılığı $\phi_{2m+1}(p)$ ne olur? Bu olasılık p 'den büyük müdür, küçük müdür? m arttıkça bulduğumuz olasılık nasıl değişir?

$m = 1$ durumunu zaten bir önceki bölümde halletmiştik. $m = 2$ olursa toplam 5 kişi olur. Öyleyse toplumun doğru kararı vermesi için en az 3 kişinin doğru kararı vermiş olması gerekir; yani 3, 4 ya da 5 kişinin doğru kararı verdiği durumların olasılıklarını toplamalıyız. Tam olarak 3 kişinin doğru karar verebilmesi olasılığı için 5 kişiden 3 kişiyi $\binom{5}{3}$ farklı şekilde seçebileceğimizi ve böylesi bir seçimin istediğimizi sağlaması olasılığının $p^3(1 - p)^2$ olduğunu gözlemleyelim. 4 ve 5 durumları için de aynı şekilde düşündüğümüzde,

$$\phi_5(p) = \binom{5}{3}p^3(1 - p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1 - p)^1 + \binom{5}{5}p^5(1 - p)^0$$

buluruz.

m 'nin 1 ve 2 olduğu durumlar artık genel durumun nasıl olacağını da belli etmekte. Toplumda $2m + 1$ kişi varsa nihai kararın doğru karar olması için en az $m + 1$ kişinin doğru kararı vermesi gerekir. Tam olarak $i \in \{0, 1, \dots, 2m + 1\}$ kişinin doğru kararı vermesi olasılığının

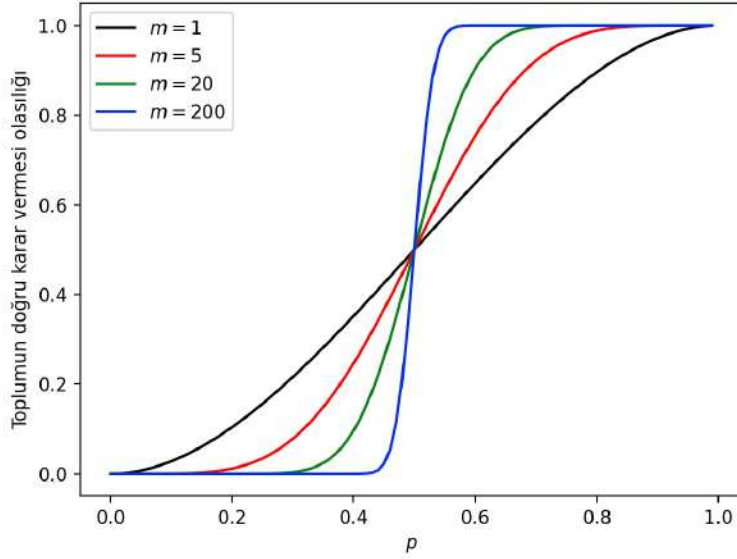
$$\binom{2m+1}{i}p^i(1 - p)^{2m+1-i}$$

olduğunu gözlemlersek ve uygun değerler üzerinden toplam alırsak nihai kararın doğru karar olması olasılığının,

$$\phi_{2m+1}(p) = \sum_{i=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i}p^i(1 - p)^{2m+1-i}$$

olduğunu görürüz.

Şimdi ilk olarak m 'nin farklı değerleri için p değeri 0'dan 1'e doğru değişirken toplumun doğru kararı vermesi olasılığı $\phi_{2m+1}(p)$ 'nin nasıl değiştiğine bir bakalım:



Şekilden görüleceği üzere $p < 0,5$ durumunda kişi sayısı m arttıkça doğru kararın alınması olasılığı düşüyor. Yani eğer bireyler yanlış seçmeye meyilliyse bir araya gelerek yanlış seçmeye daha da meyilli hale geliyor! İçgüdüsel olarak hissedilebilir olsa da matematiksel olarak gösterilişi de oldukça ilgi çekici kanımca.

Peki $p = 0,5$ olsaydı ne olurdu? Burada sürpriz yok ve toplumun doğru karara varma olasılığı da $0,5$; ne de olsa tamamen simetrik bir durum var ortada. Tabii dilerseniz bunu bulduğumuz formülü ve binom katsayılarının simetrisini kullanarak da gözlemleyebilirsiniz:

$$\begin{aligned}\phi_{2m+1}(0,5) &= \sum_{i=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i} (0,5)^i (0,5)^{2m+1-i} = (0,5)^{2m+1} \sum_{i=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i} \\ &= (0,5)^{2m+1} \frac{2^{2m+1}}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Buraya kadarki hesaplamalarımızda tek sayıda kişinin olduğunu varsaydık. Çift sayıda kişi olsaydı doğru ve yanlışların berabere kalması gibi bir durum da olabilirdi ve bunu göz önünde bulundurmanız gerekirdi. Çok da ciddi bir sıkıntı oluşturmayacak bu durumda nasıl bir yol izlenebileceği üzerine kafa yormayı size bırakalım.

Son olarak toplumdaki her bireyin doğru kararı vermesi olasılığının sabit bir p değerine eşit olduğunu varsaydığımızı hatırlayalım. Bu varsayım elbette ki gerçekçi değil. Bir sonraki görece teknik olan bölümde de bu konuda kısa bir tartışma gerçekleştireceğiz.

4. Özdeş olmayan bireyler durumu

Güzel bir soruyla uğraştık ama bireylerin doğru karara ulaşması olasılığının aynı olması varsayımı üzerinde oynama yapıp yapamayacağını da bir yandan merak ediyor insan. Bu bölümde içgüdüsel olarak açık olan bir başka durumun matematiksel açıklamasını vereceğiz. İddiamız aşağı yukarı şöyle. Toplumdaki bireylerin doğru karara varma olasılıklarının kişiden kişiye değişebildiğini ama her birinin $0,5$ 'ten küçük olduğunu varsayalım. Bu durumda toplumda çok fazla kişi varsa ve nihai karar oy çokluğuna göre verilirse doğru karara varılması olasılığı yine 0 'a yakın olacaktır. (Sonuç bölümünde daha da genel bir durum okurun ilgisine sunulacaktır.) Tabii burada birkaç muğlak ifade var, bunları netleştireceğiz. Aşağıdaki tartışma daha teknik ve olasılık teorisinden burada her birinin detayına giremeyeceğimiz bazı tanımlara ve sonuçlara ihtiyaç duyuluyor. Dileyenler bu bilgilere [1] ya da [2] referanslarından ulaşabilir ya da bu bölümün okuması ilerleyen bir zamana ertelenebilir.

Ana gözlemimizin ispatında kullanacağımız en önemli araç olasılık teorisi ve ilgili alanlardaki meşhur sonuçlardan bir tanesi olan Chernoff eşitsizliğidir. Asıl tartışmamıza geçmeden önce bu eşitsizliği bu noktada ifade edelim, meraklıları için ispatını da en sona ekleyelim.

Teorem 1. (Chernoff eşitsizliği)

$X_1, \dots, X_n$ bağımsız, 0 ya da 1 değerlerini alan Bernoulli rassal değişkenleri olsun; $p_i = \mathbb{P}(X_i = 1)$ diyelim. $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ve $\mu = \mathbb{E}[X]$ tanımlayalım. Bu durumda herhangi bir $\delta > 0$ için,

$$\mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) \leq e^{\frac{-\delta^2 \mu}{2 + \delta}}$$

eşitsizliği doğrudur.

4.1. Ana netice

Şimdi asıl konumuza dönüyoruz. İspatlayacağımız sonuç şu:

$n \in \mathbb{N}$ bireyden oluşan bir toplum düşünelim. Bu toplum önemli bir karar verme arifesinde ve kararları ya doğru ya da yanlış olacak. Toplumdaki kişileri 1, 2, ... şeklinde isimlendirelim. $j \in \mathbb{N}$ numaralı kişinin doğru kararı vermesi olasılığını p_j ile gösterelim ve

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} p_j \leq p_* < 1/2$$

olduğunu varsayalım. Toplumun nihai kararının oy çokluğuna göre verildiğini düşünelim. Bu durumda,

$$\mathbb{P}(\text{toplumun nihai kararının doğru olması}) \leq e^{-\left(\frac{(1-2p_*)^2}{4p_*+2}\right)n}$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Buradan, n sonsuza giderken toplumun doğru karara ulaşması olasılığının 0'a yakınsadığı görülür.

Şimdi Chernoff eşitsizliğinden yararlanarak iddiamızı ispatlayacağız. Toplam n kişinin doğru ya da yanlış bir tercihte bulunduğunu hatırlayalım.¹ Nihai olarak doğru karara varılabilmesi için $n/2$ tanesinden daha fazlasının doğru kararı vermiş olması gerekli. $j = 1, \dots, n$ için

$$X_j = \begin{cases} 1, & j\text{'inci kişi doğru karara vardıysa,} \\ 0, & \text{diğer durumda,} \end{cases}$$

rassal değişkenlerini tanımlayalım. Bu durumda her bir j için X_j , parametresi p_j olan bir Bernoulli rassal değişkenidir. $X = \sum_{j=1}^n X_j$ tanımını verirsek, X doğru tercih yapmış olan kişilerin sayısı olacaktır. O halde,

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right)$$

olasılığını anlamak istiyoruz.

μ ile X 'in beklenen değerini gösterirsek, beklenen değer doğrusallığı ile

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n X_j\right] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j] = \sum_{j=1}^n p_j$$

olacağını aklımızda tutalım. Burada her bir p_j 'nin $p_* \in (0, 1/2)$ sayısından küçük veya eşit olduğunu

¹Burada n çift sayı olursa doğru karara varanlarla yanlış karara varanların sayısı eşit olabilir. Bu durumda toplumun bir karara varamadığını düşünebiliriz. Bu aşağıdaki hesaplarımızla ilgili herhangi bir sorun yaratmamaktadır.

varsaydığımız için

$$0 \leq \mu \leq np_* < \frac{n}{2}$$

olacaktır.

Şimdi Chernoff eşitsizliğini kullanma zamanı. Bu amaçla $\delta = \frac{n}{2\mu} - 1$ tanımladığımızda, Chernoff eşitsizliğiyle şu sonuca ulaşırız:

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right) = \mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) \leq e^{\frac{-\delta^2\mu}{2+\delta}} = e^{-\frac{\left(\frac{n}{2\mu}-1\right)^2\mu}{2+\frac{n}{2\mu}-1}} = e^{-\frac{(n-2\mu)^2}{4\mu+2n}} \quad (1)$$

sonucuna ulaşırız. ($0 \leq \mu < (0,5)n$ olmasından ötürü $\delta > 0$ olduğunu ve Chernoff eşitsizliğini kullanabildiğimizi gözlemleyin.) Burada son basamakta birkaç basit hesap yaptık, detaylar sizde. Bu noktaya kadarki ilermeyi not düşmemiz güzel olabilir.

Toplulumun nihai kararının doğru olması olasılığı $\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right)$, şu eşitsizliği sağlar:

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right) \leq e^{-\frac{\left(n-2\sum_{j=1}^n p_j\right)^2}{4\sum_{j=1}^n p_j+2n}}$$

Şimdi iki farklı özel duruma bakacağız.

- Diyelim ki önceki bölümlerdeki gibi p_j 'lerin her biri sabit bir $p \in [0, 1/2)$ reel sayısına eşit. Bu durumda, ufak tefek işlemlerin ardından

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right) \leq e^{-\left(\frac{(1-2p)^2}{4p+2}\right)n}.$$

olduğunu görürüz. Buradan da böylesi sabit bir p değeri durumu için n artarken toplulumun doğru karara ulaşması olasılığının sahidinden de 0'a doğru yaklaştığını gözlemlemekteyiz.

- Şimdi de p_j 'lerin farklı olabileceğini ama bölümün başında varsaydığımız gibi

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} p_j \leq p_* < 1/2$$

olduğunu düşünelim. Bu durumda,

$$\mu = \sum_{j=1}^n p_j \leq np_*$$

olacaktır. Bu eşitsizliği, (1) numaralı ifadede ulaştığımız asli eşitsizlik için bir üst sınır bulmakta kullandığımızdaysa,

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{2}\right) \leq e^{-\frac{(n-2np_*)^2}{4np_*+2n}} = e^{-\left(\frac{(1-2p_*)^2}{4p_*+2}\right)n}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Burada $\frac{(1-2p_*)^2}{4p_*+2} > 0$ olmasından ötürü, toplum tarafından doğru kararın çıkması olasılığı kişi sayısı artarken yine üstel olarak 0'a doğru yakınsamakta!

4.2. * Chernoff eşitsizliğinin ispatı

Bu bölümde meraklıları için Chernoff eşitsizliğinin standart bir ispatına değineceğiz. Bu ispat da görece teknik ve dileyenler önceki tartışmamızı olduğu gibi bu kısmı da ilk okumada atlayabilir. İspatta kullanılacak ve görece daha temel olan Markov eşitsizliği ve kalkülüs kökenli bir eşitsizliği ispatına yer vermeden sadece ifade edeceğiz.

Teorem 2. (Markov eşitsizliği)

X , negatif değerler almayan bir rassal değişkense, her $t > 0$ için,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

eşitsizliği doğrudur.

Önerme 1.

δ pozitif bir reel sayıysa şu eşitsizlik doğrudur:

$$\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta) \leq -\frac{\delta^2}{2 + \delta}.$$

Şimdi Chernoff eşitsizliğini hatırlayıp ispatına odaklanabiliriz.

Teorem 3. (Chernoff eşitsizliği)

$X_1, \dots, X_n$ bağımsız Bernoulli rassal değişkenleri ve $i = 1, \dots, n$ için $p_i = \mathbb{P}(X_i = 1)$ olsun. $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ve $\mu = \mathbb{E}[X]$ tanımlayalım. Bu durumda herhangi bir $\delta > 0$ için,

$$\mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) \leq e^{\frac{-\delta^2 \mu}{2 + \delta}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. $t > 0$ olsun. X_i 'lerin bağımsız olduğunu aklımızda tutup, Markov eşitsizliği ve $1 + \alpha \leq e^\alpha$ eşitsizliğinden yararlanıp, bir takım basit işlemler gerçekleştirerek şu sonuca ulaşırız:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) &= \mathbb{P}(tX > t(1 + \delta)\mu) = \mathbb{P}(e^{tX} > e^{t(1 + \delta)\mu}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\mathbb{E}[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\prod_{i=1}^n (p_i e^t + 1 - p_i)}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + p_i(e^t - 1))}{e^{t(1 + \delta)\mu}} \\ &\leq \frac{\prod_{i=1}^n e^{p_i(e^t - 1)}}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t - 1) \sum_{i=1}^n p_i}}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t - 1)\mu}}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = e^{\mu((e^t - 1) - t(1 + \delta))}. \end{aligned}$$

(Bağımsızlık varsayımı, $\frac{\mathbb{E}[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\mathbb{E}[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}}$ eşitliğine ulaşmak için kullanılmıştır.) Şimdi en sağdaki üst sınırı t üzerinden optimize etmek gerekli. Bu amaçla $t_* = \ln(1 + \delta)$ yerleştirip üst sınırı hesapladığımızda,

$$\mathbb{P}(X > \mu(1 + \delta)) \leq e^{\mu(\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta))}$$

buluruz. Önerme 1'deki eşitsizlik kullanıldığında iddiamız ispatlanmış olur:

$$\mathbb{P}(X > (1 + \delta)\mu) \leq e^{\frac{-\delta^2 \mu}{2 + \delta}}.$$

□

5. Sonuç

Bu yazıda üç kişilik bir ailenin oy çokluğuna göre vereceği bir karar için yazdığımız bir bulmacayla başlayıp soruyu genişlettik ve hatalı kararlar vermeye meyilli insanlar bir araya gelip bir karara vardıklarına hata

yapma olasılıklarının daha da arttığını gözlemledik. Bu noktada okur peki doğru karar vermesi olasılığı 0, 5'ten büyük olan insanlar da olsaydı ne olurdu diye merak edebilir. Böylesi bir durumu analiz etmek gibi bir niyetiniz olursa n kişinin olduğu bir durumda doğru karar vermesi olasılığı 0, 5'ten düşük olan kişilerin $h_1(n)$ tane, 0, 5'ten büyük olan kişilerin $h_2(n)$ tane olduğunu varsayıp h_1, h_2 fonksiyonları ve bu iki gruptaki bireylerin olasılıkları üzerinde çeşitli varsayımlar yaparak yine ilginç sonuçlara ulaşabilirsiniz. Tabii işler gittikçe teknikleşip profesyonel matematik sınırlarına yaklaşmakta. Bununla beraber dilerseniz bilgisayar yardımıyla çeşitli denemeler yapıp gözlemlerde bulunabilir, sanılar ortaya atabilirsiniz. Oy çokluğuna dayalı karar verilen durumlarla karşılaştığınızda, hatalı kararlar vermeye meyilli insanların etrafınızda az olması dileklerle!

Teşekkür. Yazının son halinin üzerinden gidip faydalı yorumlarda bulunan Erdem Efe Delen'e teşekkür etmek isterim.

■ Kaynaklar

- [1] Işlak, Ümit. Olasılık Teorisine Kısa Bir Giriş, Matematik Dünyası Dergisi, 2023.
- [2] Işlak, Ümit. Temel Olasılık Teorisi ve İstatistik I. Nesin Yayıncılık, 2022.

Hayatın Koordinatları

GÜLİZAR NEHİR GÜLKANAT

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü 3. Sınıf Öğrencisi

✉ nehirgulkanat@gmail.com



İnsanoğlu her zaman geleceğini merak etmiş, hayatta onu neler beklediğini öğrenmek için türlü yollara başvurmuştur. Ancak hiçbir zaman tam anlamıyla geleceğini görmeyi başaramamış, geleceğin getirdiği belirsizliğin yükünden kurtulmak için çabalayıp durmuştur. Oğuz Atay ise Tutunamayanlar eserinde insan hayatının tahmin edilmesinin aslında mümkün olabileceğini matematiksel yollarla kurgulamıştır: “Hayatın Koordinatları deyiminden kısaca şunu anlıyoruz: bir insanın, belirli bir zamanda, belirli bir yerde ve belirli şartlar altında ne yapmış olduğunu bilirse bu bilinenlerle, yani hareket ve zaman boyutlarının önceden tesbiti ile, bu verilere dayanarak yazılan ve sabit katsayıları, o insanın tayin edilmiş özellikleriyle belirlenen denklemlerin, zaman değişkenine göre çizilen eğrileri, bize o insanın ileride ne gibi şartlar altında ne yapacağını gösterir. Şimdiye kadar yaptığım incelemeler, dokuz bilinmeyenli, yani dokuz eksenli bir sistemde bir insanın bütün hayatının denkleminin yazılabileceği ve buna istinaden de hayatın koordinatları metoduyla varlığının ifade edilebileceği merkezindedir. Böylece, insan hayatına ait bütün meselelerin önceden, yani yaşanmadan, çözülebilmesi imkân dahiline giriyor.”

Atay, böylelikle insanı matematiksel boyutlara taşımış ve geleceğini tahmin etmek için kurduğu sisteme “Hayatın Koordinatları” adını vermiştir. Hayatın koordinatları sistemine göre insanın belirli zamanda, belirli yeri ve belirli hareketi bilinirse gelecekte yaşanacakların tahmin edilmesi, hatta olayların çözülebilmesi imkân dahilindedir. Peki ya hayatın koordinatları nasıl mümkün olabilir?

Aslında Oğuz Atay’ın kurduğu hayatın koordinatlarıyla insanı bir vektör şeklinde yazıp diferansiyel denklemlerle geleceğini hesaplamak mümkün olmalıdır. Atay’ın ileri sürdüğü bu düşünceyi matematiksel boyuta taşıyacak olursak, insanı doğal olarak zamana bağlı olarak değişen bir fonksiyon olarak ifade etmek mümkündür. Zamanı t , insanın o zamandaki durumunu $x(t)$ ve davranışlarını belirleyen fonksiyonu da f ile gösterelim. Böylelikle insanın değişimi $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$ şeklinde yazılabilir. Bu gösterimde $x(t)$ tek bir sayı değil, çok değişkenli bir vektördür. Çünkü insan yalnızca tek yönlü bir varlık değildir. Psikolojik durumu, sosyal çevresi, geçmiş deneyimleri, ekonomik koşulları, alışkanlıkları ve daha birçok etkenin aynı anda var olmasıyla değişim gösterir. (Bu etkenlerin hepsi f fonksiyonunun içindedir.) Bu nedenle insan $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ şeklinde yazılır. Bu vektör gösterimi de Atay’ın bahsettiği dokuz bilinmeyenli sisteme karşılık gelir.

Artık insan davranışı bir diferansiyel denklemle ifade edilmiş olur. Ancak bu denklemde her zaman sabit katsayılar yer alamaz. Sabit katsayılı bir denklemle modelleme yapılması durumunda davranış zamandan ve dış etkenlerden bağımsız bir şekilde aynı ilerlemelidir. Ancak insanın davranışını etkileyen şeyler sık sık değişim gösterebilir ve bu nedenle denklemdeki katsayılar da değişken olmalıdır.

Şimdi belirttiğimiz gösterimleri kullanarak insan hayatını bir Cauchy, başlangıç değer problemi biçiminde yazabiliriz:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Burada t zamanı, $x(t)$ insanın o zamandaki durum vektörünü ve $f(t, x)$ ise insanın bulunduğu koşullara göre davranışının nasıl değiştiğini belirleyen davranış fonksiyonunu gösterir. Bu problemde başlangıç koşulu olan $x(t_0) = x_0$ ifadesi, Oğuz Atay'ın hayatın koordinatları sisteminde bahsettiği belirli zamanda, belirli yerde ve belirli şartlar altında bulunan insanın başlangıç koşullarını temsil eder niteliktedir. Ancak insan hayatını bir diferansiyel denklem hâlinde yazabilmek ve bir Cauchy başlangıç problemi hâlinde belirtmek bu problemin çözülüp, insanın hayatındaki bir sonraki durumun tahmin edilebileceğini kesinleştirmez. Bunun kesinleşmesi ise Cauchy-Picard Teoremi'nin sağlanması ile mümkündür.

Cauchy-Picard (Temel Varlık ve Teklik) Teoremi bize şunu söyler:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. (x_0, y_0) noktasını içeren $R : [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ şeklinde kapalı bir dikdörtgen olsun. Eğer, $f(x, y)$ fonksiyonu R üzerinde sürekli ise, ve f fonksiyonu y değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlarsa, yani $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$ için $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $L > 0$ sabiti varsa, bu başlangıç değer probleminin x_0 'ın çevresinde $|x - x_0| \leq h$ olacak şekilde tanımlı bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir. Yani Cauchy-Picard Teoremi'nin sonucu olarak **sürekliliğin çözümün varlığı** için yeterli olduğunu ve **Lipschitz koşulunun çözümün tekliğini** garanti ettiğini söyleyebiliriz. Bu iki koşulun var olması durumunda da denklem hem çözülür hem de bu çözüm tektir.

Hayatın koordinatları için; t zamanı, $x(t)$ insanın o zamandaki durum vektörünü ve $f(t, x)$ ise insanın bulunduğu koşullara göre davranışının nasıl değiştiğini belirleyen davranış fonksiyonu olacak şekilde

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{başlangıç problemidir. Şimdi eğer bu başlangıç probleminin Cauchy-Picard Teoremi'ni}$$

sağladığını gösterirsek hayatın koordinatlarıyla insanın geleceğinin tahmin edilmesinin imkân dahilinde olduğunu görmüş oluruz ve Oğuz Atay'ın kurduğu sistem geleceği bilmeyi mümkün kılar. Ancak insan davranışını belirleyen $f(t, x)$ fonksiyonunun Cauchy-Picard Teoremi'nin koşullarını sağlaması gerçek hayatta mümkün değildir. İnsanın davranışlarına etki eden duygusal değişimler, travmalar, dış etmenler, çevresel koşullar, ani karar değişiklikleri hiçbir zaman sabit değildir. En iyi durumda bile en küçük dalgalanmalara yol açarlar. Bu da insan davranışının sürekliliğini bozar. Bu nedenle $f(t, x)$ fonksiyonunun R bölgesinde sürekli olması ihtimal dışındadır. Süreklilik sağlanmadığında ise Cauchy-Picard Teoremi'ne göre çözümün varlığı garanti edilemez.

Bunun dışında insanların en ufak değişimlerde bile gösterdikleri tepkiler beklendiği gibi olmayabilir. En ufak bir haberde, olayda çok büyük tepkiler gösterebilen insan, büyük bir kaos anında hiçbir tepki dahi vermeyebilir. Bu durum da $f(t, x)$ fonksiyonunun x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlamasını ihtimal dışı kılar. Lipschitz koşulu, sistemdeki en küçük bir değişimin çıktıda da küçük ve kontrollü bir değişime yol açmasını ister, fakat insan davranışındaki değişimler koşulu sağlayacak L sabitinin varlığını imkânsız kılar. Yani $|x_1 - x_2|$ çok küçük bir olayı temsil etse bile $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|$ çok büyük bir tepkiye karşılık gelebilir. Bu da Lipschitz koşulunu sağlayan L sabitini devre dışı bırakır. İnsan için Lipschitz koşulu sağlanmadığında ise çözümün tekliği ortadan kalkmış olur, yani hayatın koordinatlarında insanın belirli zaman ve durumda birden fazla şeyi aynı anda yaşıyor olması gerekir. Bu ise zaten mümkün değildir.

Hayatın koordinatlarını belirleyen $f(t, x)$ fonksiyonun Cauchy-Picard Teoremi'ni sağlaması mümkün değildir. Bu da demektir ki Oğuz Atay'ın hayatın koordinatları sistemiyle insanın geleceğinin tahmin edilebilmesi matematiksel olarak imkânsızdır. Çünkü çözümün varlığı insan yaşamıyla garanti edilemez, var olsa dahi tekliği sağlanamaz.

İnsanın hayatı matematiksel yöntemlerle bir fonksiyon hâlinde yazılıp, bir denklem ile geleceğinin hesaplanması mümkün olsa da yaşamın koşulları, hayatın dalgaları; Atay'ın "...*Böylece, insan hayatına ait bütün*

meselelerin önceden, yani yaşanmadan, çözülebilmesi imkân dahiline giriyor.” sözündeki imkân dahilini ortadan kaldırır. İnsan yaşamını etkileyen koşulları sabit, verdiği tepkiler aynı olan bir varlık olsaydı geleceği matematiksel yöntemlerle hesaplanabilirdi, ancak bu durumda insan, insan olmazdı.

■ Kaynaklar

- [1] Atay, Oğuz. Tutunamayanlar, İletişim Yayınları 2021.
- [2] Ross, Shepley L. Differential Equations, John Wiley & Sons 1984.

Bir Çarpışmanın Anatomisi: Güvercin Yuvası İlkesi, Doğum Günü Paradoksu ve Dijital Doppelgängerlar

ESRA KORKMAZ

Düzce Üniversitesi Gölyaka Meslek Yüksekokulu

✉ esrakorkmaz@duzce.edu.tr



Hiç size tıpatıp benzeyen ancak aranızda hiçbir kan bağı olmayan birine, yani bir *doppelgänger*e rastladınız mı? Avrupa mitolojisinde bu karşılaşma, yaklaşan bir felaketin habercisi ve bir uğursuzluk olarak kabul edilirdi. Çünkü özünde, birey olarak benzersizliğimize duyduğumuz inancın temelden sarsılması demektir.

Peki ya bu benzersizlik yanılgısı, yalnızca insanlara özgü değilse? Ya içinde yaşadığımız devasa veri evreninde, size özel bir fotoğrafın, kritik bir belgenin veya gizli bir formülün, tamamen alakasız başka bir veriyle tıpatıp aynı dijital parmak izine sahip olması mümkünse? İşte bu, bir efsane ya da bir tesadüf değil, matematiğin en temel prensiplerinden biri olan Güvercin Yuvası İlkesi'nin doğrudan bir sonucudur.

Bu yazıda, matematiğin bu zarif ilkesinden yola çıkarak, olasılığın şaşırtıcı dünyasına adım atacağız. Ardından, bu fikirlerin dijital çağın görünmez koruyucuları olan hash fonksiyonlarıyla yollarının nasıl kesiştiğini keşfedeceğiz. Böylece, basit bir mantık oyunundan doğan matematiksel bir kavramın, modern dünyanın dijital güvenliğini ayakta tutan temel taşlarından biri hâline nasıl geldiğini görmüş olacağız.

■ Güvercin Yuvası İlkesi

Güvercin Yuvası İlkesi, kombinatoriğin en temel ilkelerinden biridir ve son derece basit bir gerçeği ortaya koyar:

$n > m$ olmak üzere, n adet nesne m farklı kutuya yerleştirilirse, en az bir kutuda birden fazla nesne bulunmak zorundadır.

Ya da özel olarak, elimizdeki güvercin sayısı yuva sayısından fazlaysa, en az bir yuvayı birden fazla güvercinin paylaşması kaçınılmazdır.

Bu fikir ilk olarak 17. yüzyılda Fransız matematikçi Jean Leurechon tarafından ortaya atılmıştır. Ancak, bilim dünyasında sıkça rastlanan ve Stigler Yasası (N1) olarak bilinen adlandırma eğilimine de uygun olarak, Alman matematikçi Dirichlet'e atıfla *Dirichlet'in Çekmece İlkesi* olarak bilinir.

Şimdi, bu ilkenin ne kadar güçlü ve derin çıkarımlar barındırdığını anlamak için aşağıdaki örneği birlikte inceleyelim.

Örnek: Türkiye'de yaşayan her insanın farklı sayıda saç teline sahip olması matematiksel olarak imkansızdır. Yani, bir yerlerde sizinle tam olarak aynı sayıda saç teli olan birileri mutlaka vardır.

Bu iddiayı ispatlamak için önce yuvalarımızı ve güvercinlerimizi belirleyelim.

Bilimsel araştırmalar bir insanın başında yaklaşık 100.000 ila 150.000 saç teli olduğunu söyler. O halde, olası saç teli sayısı seçeneklerimiz şunlardır: 0 saç teli, 1 saç teli, 2 saç teli, ..., 150.000 saç teli. Bu bize

toplam 150.001 adet farklı yuva verir. Bu yuvalara yerleştireceğimiz güvercinler ise, Türkiye’de yaşayan yaklaşık 85,7 milyon kişidir.

Şimdi elimizde 85,7 milyon güvercin ve sadece 150.001 yuva var. Güvercin sayımız yuva sayımızdan katbekat fazla. Demek ki Güvercin Yuvası İlkesi’ne göre, ülkenin bir yerlerinde sizinle tam olarak aynı sayıda saç teline sahip en az bir kişi olmak zorundadır.

■ Doğum Günü Paradoksu

Güvercin Yuvası İlkesi, nesne sayısı kutu sayısını aştığında bazı nesnelerin aynı kutuya düşmek zorunda olduğunu söyleyerek, çakışmanın kaçınılmazlığını garanti eder. Ancak bu ilkenin ötesinde, çok daha şaşırtıcı bir durum vardır. Bazen bir çakışma olasılığı, kaçınılmazlık için gereken sayıya ulaşmadan çok daha önce dikkate değer bir ölçüde yükselir. Bu olguyu gözler önüne seren en güzel örnek Doğum Günü Paradoksudur.

Güvercin Yuvası İlkesi’ni doğrudan uygular ve 365 günü yuvalar, insanları ise güvercinler olarak kabul edersek, 366 kişilik bir grupta en az iki kişinin aynı doğum gününü paylaşmasının kaçınılmaz olduğunu söyleyebiliriz. Doğum günü paradoksunun ortaya koyduğu şaşırtıcı gerçek ise, çakışma olasılığının %50’yi aşması için yalnızca 23 kişinin yeterli olduğudur.

Peki, sezgilerimize aykırı gelen bu durum nasıl açıklanabilir? Buradaki kilit nokta, paradoksun “Gruba yeni katılan biri benimle aynı doğum gününe sahip mi?” sorusunu değil, “Grupta herhangi iki kişinin aynı doğum gününü paylaşma olasılığı nedir?” sorusunu sormasıdır (N2).

Bu ikinci sorunun anahtarı, potansiyel çift sayısının kişi sayısından çok daha hızlı artmasıdır. Yani grupta:

- 2 kişi varsa kontrol edilecek sadece 1 çift,
- 3 kişi varsa, 3 çift (A, B ve C kişileri için, (A,B), (A,C), (B,C)),
- 23 kişi varsa, $\frac{23 \times 22}{2} = 253$ farklı çift vardır. (Burada, n kişilik bir gruptan 2 kişilik kaç farklı çift oluşturulabileceğini hesaplamak için kullanılan $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ kombinasyon formülünü hatırlayalım.)

Her bir çift, bir doğum günü çakışması için yeni bir fırsattır. 253 farklı deneme yapmak, olasılığı hızla %50’nin üzerine taşır.

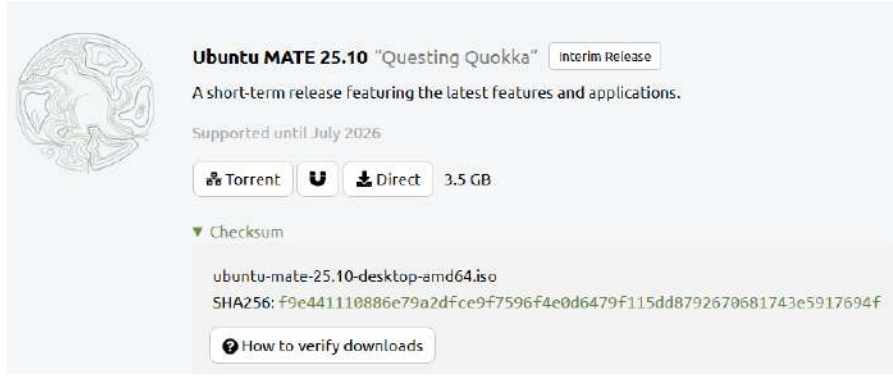
Genel bir kural olarak, olası sonuçların sayısı K ise, bir çakışmanın gerçekleşme olasılığının %50’yi aşması için yaklaşık olarak $\sqrt{K}$ deneme yapmak gerekir (N3).

Peki bu prensip dijital evrenimizin temel taşlarından biri olan kriptografi ile nasıl ilişkilidir? Bu sorunun cevabı, dijital parmak izi olarak da bilinen hash fonksiyonlarında saklıdır.

Hepimizin de bildiği gibi, günümüz dünyasında verilerimiz — fotoğraflarımız, yazışmalarımız, bankacılık işlemlerimiz— dijital formda saklanır ve paylaşılır. Bu devasa veri akışında, bir mesajın yolda değiştirilmediğinden, indirdiğimiz bir yazılımın orijinal olup olmadığından ya da bir dosyanın içeriğinin bozulmadığından nasıl emin olabiliriz? İşte bu noktada, verilerin parmak izi niteliğinde eşsiz bir kimlik taşıması hayati derecede önemlidir ve kriptografik hash fonksiyonları tam olarak bu ihtiyaca cevap verir.

Bu fonksiyonlar, değişken uzunluktaki herhangi bir veriyi alıp, onu sabit uzunlukta bir veriye (yani 0 ve 1’lerden oluşan sabit uzunlukta bir diziye) dönüştürür. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, d sabit bir bit sayısı (örneğin 128, 160 veya 256 bit) olmak üzere, bir H hash fonksiyonu $H : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^d$ biçiminde tanımlıdır. Burada $\{0, 1\}^*$ keyfi uzunluktaki tüm olası girdilerin (metinler, fotoğraflar, dosyalar vb.), $\{0, 1\}^d$ ise d -bit uzunluğundaki çıktıların kümesini gösterir.

Hash fonksiyonları parola güvenliğinden dosya bütünlüğüne, dijital imzalardan blokzincir teknolojisine kadar pek çok kritik uygulamanın temelini oluşturur. Örneğin, internetten bir program indirdiğimizde gördüğümüz o anlamsız karakter dizisi, dosyanın dijital parmak izidir. Bu sayede dosyanın orijinal ve değiştirilmemiş olduğunu saniyeler içinde doğrulayabiliriz.



Şekil 1. Ubuntu MATE İndirme Sayfası ve SHA256 Hash Fonksiyonu

Yüzlerce sayfadan oluşan bir sözleşmeye atılan dijital imzalar, belgenin tamamını şifrelemek yerine, çok daha küçük olan hash değerini şifreleyerek hem güvenliği hem de verimliliği garanti altına alır. Bitcoin ve benzeri kripto paraların temelini oluşturan blokzincir teknolojisi ise, her bir blokta önceki bloğun hash değerini saklayarak kırılması neredeyse imkânsız bir güven zinciri oluşturur.

Hash fonksiyonlarının en yaygın ve vazgeçilmez kullanım alanlarından biri de parola korumasıdır. Bir web sitesine üye olurken girilen şifreler açık metin hâlinde veri tabanına kaydedilmez; bunun yerine şifrenin hash değeri saklanır. Böylece kötü niyetli bir saldırgan veri tabanına erişse bile, şifrenin kendisini değil, geri döndürülemez (N4) matematiksel gölgesini ele geçirmiş olur. İşte bu tek yönlülük özelliği sebebiyle, unuttuğumuz bir parola bize yeniden gönderilerek değil de ‘şifrenizi sıfırlayın’ seçeneğiyle yenilenebilir. Sistem bile orijinal şifreyi bilmez, sadece girilen şifrenin hash değerini doğrular.

Günümüzde en yaygın kullanılan ve en güvenli hash algoritmalarından biri SHA-256 (Secure Hash Algorithm 256-bit)’dir. Bu algoritma herhangi bir veriyi bir dizi zincirleme matematiksel işlemde geçirerek 256 bitlik bir hash üretir.

Örneğin ‘hacettepe’ girdisinin SHA-256 değeri:

d3d52d1f1e73d151637c610fe21f6910d8bd64fd3956eb3a7cea79e656d4cfd1

biçimindedir (N5).

Hash fonksiyonları *Çığ Etkisi (Avalanche Effect)* olarak bilinen bir özelliğe sahiptir. Bu özelliğe göre, orijinal veride yapılan küçük bir değişiklik bile tamamen farklı bir hash değeri üretir. Örneğin sadece ilk harfi değiştirerek elde ettiğimiz ‘Hacettepe’ girdisinin SHA-256 değeri,

72ea48626f122b8cf0ac2396b86acaf0e58076f3a1b41b39cae351f825fb91d2

gibi bambaşka bir dizi olacaktır.

SHA-256 gibi hash fonksiyonları dijital parmak izi işlevi görseler de yapıları gereği bazı matematiksel sınırlılıkları bulunmaktadır. Bu fonksiyonlar her zaman sabit uzunlukta bir çıktı ürettikleri için, üretebilecekleri tüm olası çıktıların sayısı sınırlıdır. Örneğin SHA-256 için bu değer 2^{256} ’dır (N6). Bu sayı yaklaşık 1.15×10^{77} gibi akıl almaz bir büyüklükte olsa da sonludur.

Öte yandan, olası tüm girdilerin kümesi teorik olarak sonsuzdur; çünkü mevcut bir veriye sadece bir harf, bir piksel veya bir bit ekleyerek yeni bir girdi yaratmak mümkündür. O halde, Güvercin Yuvası İlkesi’ne göre, sonsuz sayıda girdi (güvercin) ve sonlu sayıda çıktı (yuva) olduğundan, en az iki farklı girdinin aynı SHA-256 değerine sahip olması kaçınılmazdır (N7).

Ancak bu dijital *doppelgängerlar* teorik olarak var olsalar da, pratikte bulunmaları son derece zordur. Çünkü Doğum Günü Paradoksu’na göre, SHA-256’da %50 çarpışma olasılığına ulaşmak için yaklaşık $\sqrt{2^{256}} = 2^{128}$ deneme yapmak (N8) gereklidir ve bu sayı astronomik büyüklüktedir. Dünyadaki tüm bilgisayarlar saniyede milyarlarca hash üretse bile, bu kadar deneme için evrenin yaşını bile katbekat aşan bir süre gerekir.

Bu nedenle SHA-256 gibi modern hash fonksiyonlarının pratikte çarpışma direncine sahip olduğu kabul edilir. Matematiksel *doppelgängerlar* teorik olarak hep var olacak olsalar da, onları bulmamızı engelleyen o devasa sayı duvarı, dijital evrenimizin (en azından şu an için) en büyük güvencesidir.

■ Kaynaklar

- [1] Doppelgänger Etkisi: Yakın Akraba Bile Olmayan “İkizler” Neden Birbirine Bu Kadar Benziyor? *Evrin Ağacı*. <https://tinyurl.com/4hyk39hk> (Erişim Tarihi: 17.11.2025).
- [2] The Pigeonhole Principle. *Maths Careers*. <https://www.mathscareers.org.uk/pigeonhole-principle/> (Erişim Tarihi: 17.11.2025).
- [3] How Many Hairs on a Human Head? *Healthline*. <https://www.healthline.com/health/how-many-hairs-on-a-human-head> (Erişim Tarihi: 17.11.2025).
- [4] Tesler, G. The Birthday Problem, *UC San Diego Mathematics*.
- [5] Kak, A. Hashing for Message Authentication and Digital Signatures, Lecture Notes, *Purdue University - School of Electrical and Computer Engineering*.
- [6] Emn178. Online SHA256 Hash Generator. *GitHub Pages*. <https://emn178.github.io/online-tools/sha256.html> (Erişim Tarihi: 17.11.2025).

■ NOTLAR

- (N1) Stigler’in Eponim Yasası, buluşların ve keşiflerin genellikle orijinal kaşifinin adını almadığını öne sürer. Tıpkı bu fikrin aslında Robert K. Merton’a ait olup, Stigler Yasası olarak bilinmesi gibi.
- (N2) İlk soruda karşılaştırma hedefi sabit ve tektir. Örneğin doğum günümüz 7 Temmuz ise, gruptaki diğer herkesi sadece bu tek tarihle karşılaştırırız. Odaya giren herhangi bir kişinin doğum gününün tam olarak 7 Temmuz olma olasılığı $\frac{1}{365}$ ’dir, yani oldukça düşüktür. İkinci soruda ise ortada belirli bir tarih yoktur. Herhangi bir eşleşmenin olması yeterlidir.
- (N3) $\sqrt{K}$ kuralı, Doğum Günü Paradoksu’nun altında yatan karmaşık matematiksel formüllerden elde edilen bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım, K sayısının çok büyük olduğu durumlarda oldukça isabetli sonuçlar verse de, $K = 365$ gibi görece küçük değerler için gerçek sonuçtan sapmalar gösterebilir. Doğum Günü Paradoksu’ndaki 23 kişinin nasıl elde edildiğini görmek için problemi tersten ele alalım. Bunun için, n kişilik bir grupta kimsenin aynı doğum gününü paylaşmama olasılığını $P(\text{Çakışma Yok})$ ile gösterelim. Bu durumda aradığımız çakışma olasılığı $P(\text{Çakışma Var}) = 1 - P(\text{Çakışma Yok})$ olacaktır. Amacımız, $P(\text{Çakışma Var}) > 0.50$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n tamsayısını bulmaktır. n kişilik bir grupta hiç çakışma olmaması olasılığını, odaya sırayla giren kişileri tek tek ele alarak hesaplayabiliriz. Grup içinde çakışma olmaması için, her yeni gelen kişi kendinden önceki kişilerden farklı bir günde doğmuş olmalıdır. $P(\text{Çakışma Yok})$ değeri, bu adımların her birinin gerçekleşme olasılıklarının çarpımıdır.

1. Odaya giren ilk kişi için, kimseyle çakışmayan bir doğum gününe sahip olma olasılığı $\frac{365}{365} = 1$ ’dir, çünkü zaten odada kimse yoktur.
2. İkinci kişinin birinci kişiden farklı bir günde doğmuş olma, yani doğum günlerinin çakışmaması olasılığı $\frac{364}{365}$ ’dir.
3. Üçüncü kişinin, ilk iki kişiden farklı bir günde doğmuş olma olasılığı $\frac{363}{365}$ ’dir.
4. n . kişinin, kendinden önceki $n - 1$ kişinin tamamından farklı bir günde doğmuş olma olasılığı $\frac{365-(n-1)}{365} = \frac{365-n+1}{365}$ ’dir.

Dolayısıyla, hiç çakışma olmama olasılığı bu bağımsız olayların çarpımıdır:

$$P(\text{Çakışma Yok}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \dots \times \frac{365 - n + 1}{365} = \frac{365!}{(365-n)! 365^n}$$

O halde, $n = 22$ kişi için $P(\text{Çakışma Var}) \approx 0.4757$ iken, $n = 23$ için $P(\text{Çakışma Var}) \approx 0.5073$ olur. Böylece $n = 23$ kişilik bir grupta, en az iki kişinin aynı doğum gününü paylaşma olasılığı %50’yi aşar.

- (N4) Bu özellik *ön-görüntü direnci* (*pre-image resistance*) veya *tek yönlülük* (*one-way property*) olarak adlandırılır. H bir hash fonksiyonu ve h bir hash değeri olmak üzere, $H(m) = h$ olacak şekilde bir m girdisi bulmanın hesaplama açısından mümkün olmadığı (*computationally infeasible*) anlamına gelir.
- (N5) Burada gördüğümüz 64 karakterlik hash değeri 16’lık sayı sisteminde yazılmıştır ve her bir karakter 4 bitlik bilgiyi temsil eder. Dolayısıyla, $d \rightarrow 1101$, $3 \rightarrow 0011$, $5 \rightarrow 0101$, ... şeklinde ikilik sayı sistemine dönüştürülürse, $64 \times 4 = 256$ bitlik bir dizi elde edilir.
- (N6) Her bir bitin 0 veya 1 olmak üzere iki farklı ihtimali olduğu göz önüne alındığında, 2^{256} ihtimal olduğu kolayca görülebilir.
- (N7) İki farklı veri parçasının, aynı hash fonksiyonundan geçirilmesi sonucu tamamen aynı hash değerini üretmesine *çakışma* (*collision*) denir. Kriptografik hash fonksiyonları için bu durum, fonksiyonun ideal özelliklerinden biri olan çakışma direncinin kırıldığı anlamına gelir ve ciddi güvenlik zafiyetlerine yol açabilir.
- (N8) Burada “deneme yapmak”, genellikle *kaba kuvvet* (*brute-force*) saldırısı olarak bilinen bir yöntemi ifade eder. Bu süreç temelde şu adımlardan oluşur: Önce rastgele bir veri girdisi (örneğin bir metin, karakter dizisi veya dosya) seçilir. Bu girdinin hash değeri SHA-256 gibi bir hash fonksiyonu kullanılarak hesaplanır ve bulunan değer daha sonra karşılaştırmak üzere saklanır. Ardından tamamen farklı yeni bir girdi seçilir ve onun da hash değeri hesaplanır. Bu yeni hash, daha önce kaydedilen tüm hash değerleriyle karşılaştırılır. Eğer bir eşleşme —yani bir çarpışma— bulunursa işlem sonlandırılır. Ancak genellikle eşleşme hemen bulunamaz. Bu durumda, birinci adıma geri dönülür ve tamamen farklı yeni bir girdi seçilerek aynı döngü (yani girdi seçme, hash hesaplama ve karşılaştırma işlemi) trilyonlarca, hatta katrilyonlarca kez tekrarlanır. Amaç, astronomik sayıdaki olası girdinin içinden, tesadüfen aynı hash değerini üreten iki tanesini bulmaktır. Hash fonksiyonu yeterince güvenliyse, bu yöntemle pratik bir çarpışma bulmak hesaplama açısından imkânsıza yakın süreler gerektirir. Çarpışmaların pratikte bulunamaması kritiktir. Çünkü bir saldırgan, sizin imzaladığınız meşru bir dijital belgeyle aynı hash değerini taşıyan sahte bir belge üretebilseydi, dijital imzanız bu sahte belge için de geçerli olurdu. Bu durum ise, dijital güvenliğin temel mekanizmalarının tamamen çökmesi anlamına gelirdi.

Fuzzy Yaşantılarımızda Fuzzy Kümeler

DAMLA NİGAR

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü Yüksek Lisans Öğrencisi

✉ damlanigar@hacettepe.edu.tr



Çok uzun zaman boyunca küme teorisi Aristoteles'in 0,1 mantığı ile ilerlemiştir. Yani klasik küme teorisinde, evrensel kümenin elemanlarının bir kümenin kesin olarak elemanı olması ya da olmaması durumu söz konusudur. Oysa 1965 yılında Zadeh'in ortaya attığı “fuzzy küme” kavramı, klasik küme teorisini de kapsayan, ancak daha geniş ve gerçek hayata daha yakın bir anlayış sunmuştur. Fuzzy (bulanık) Küme teorisinde bir elemanın (bir nesnenin) bir kümeye kesin ait olmak ya da kesin ait olmamak gibi keskin bir çizgisi yoktur.

Burada, bir nesne bir kümeye belirli bir derecede aittir ve aynı zamanda belirli bir derecede de ait değildir. Matematikğin gerçeklerle, hayatla ve hatta duygularla bile örtüşebildiği bir teori olmasından ötürü bu yazıda “fuzzy kümeler” ile ilgili genel bilgiler verilecek ve bunların hayatla özdeşleştiği noktalara dikkat çekilecektir.

■ Fuzzy (Bulanık) Kümeler ve Üyelik Fonksiyonları

Giriş kısmında bahsedildiği üzere, fuzzy kümeler keskin sınırları olmayan, birçok alana (Mühendislik, Uygulamalı Matematik, Fizik, Psikoloji vb.) uygulanabilen ve bu sayede daha esnek ve daha kapsamlı bilgilere ulaşabilmemize aracı olan kümelerdir. Bu kümeler için bir nesnenin %100 ait olma ya da ait olmama durumu söz konusu olmadığından, o kümeye ne kadar ait olduğunu tanımlayabilmek için “üyelik fonksiyonları” kullanılır.

Klasik küme teorisinde, bir A kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada X , A kümesini içeren evrensel kümeyi, x ise X 'in keyfi bir elemanını ifade etmektedir. Yani karakteristik fonksiyon, evrensel kümenin elemanlarını ya 0 ya da 1 değerine götürür. Bu değerler, klasik mantıktan ötürüdür. Klasik mantıkta bir şey ya totoloji (1) ya da çelişkidir (0). Ya doğru, ya da yanlış. Dolayısıyla klasik küme teorisinde bir eleman ya kümeye aittir ya da değildir; başka bir ara durum söz konusu değildir.

Bu durum, karakteristik fonksiyonun matematiksel olarak

$$\chi_A(x) : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

şeklinde ifade edilmesini sağlar.

$\forall x \in X$ için $\chi_A(x) = 0$ ise x elemanı A kümesinin bir elemanı değildir. $\chi_A(x) = 1$ ise x elemanı A kümesinin bir elemanıdır.

Eğer karakteristik fonksiyonun değer kümesi $\{0, 1\}$ yerine $[0, 1]$ aralığına genişletilirse, bir elemanın kümeye ait olma durumu dereceli olarak ifade edilebilir hale gelir. Bu genişletme sonucunda elde edilen fonksiyona “üyelik fonksiyonu”, bu fonksiyonla tanımlanan kümeye ise “fuzzy küme” adı verilir. Beklenildiği üzere fuzzy kümeler, klasik kümelerin çok daha fazlasını kapsayan bir yapıya sahiptir.

Bu durumda bir fuzzy kümenin üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) : X \longrightarrow [0, 1]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mu_A(x)$, x elemanının A fuzzy kümesine ait olma derecesini gösterir. Bu bakımdan klasik kümeler, üyelik fonksiyonlarının yalnızca 0 ve 1 değerlerini aldığı özel fuzzy kümeler olarak değerlendirilebilir.

Buradan itibaren $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonunu hem klasik kümeler hem de fuzzy kümeler için kullanacak olursak, bir A klasik kümesi

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$$

şeklinde ifade edilirken, bunu üyelik fonksiyonu ile şu şekilde de gösterebiliriz:

$$A = \{(\mu_A(x), x) : x \in \mathbb{N}\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (0, x) : x \in \mathbb{N}, x \geq 4\}.$$

Burada $(\mu_A(x), x)$ ile kastedilen, x nesnesinin A kümesine $\mu_A(x)$ derecede ait olmasıdır. Küme klasik olduğundan, 1 ve 3 dahil olmak üzere, 1 ile 3 arasındaki doğal sayıların bu kümeye ait olma derecesi 1’dir; yani kesin olarak A kümesinin elemanıdır. Buna karşılık, A kümesine ait olmayan elemanların üyelik derecesi 0’dır.

Fakat bir B fuzzy kümesi tanımlayacak olursak, bu keskin sınırlar kısmen ortadan kalkar.

$$B = \{2\text{'ye yakın reel sayılar}\}$$

kümesini düşünelim. Artık alışageldiğimiz küme teorisi biraz daha farklılaşıyor. Herhangi bir sayının 2’ye yakın olup olmadığına nasıl karar verirsiniz? Ne derece yakınlıktan bahsediyoruz? 2.99 ya da 3.243 bu kümenin elemanı mı yoksa değil mi? İşte tüm bu soruların yanıtını verecek olan şey, “bu kümenin hangi üyelik fonksiyonuna sahip olduğu”dur. Çünkü hazır olun, aslında tüm reel sayılar artık bir derecede bu kümenin bir elemanı ve bir derecede de bu kümenin elemanı değil.

$$\mu_B(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [1, 2] \\ 3 - x, & x \in (2, 3] \\ 0, & \text{diğer } x\text{'ler} \end{cases}$$

üyelik fonksiyonuna bakalım. $\mu_B(2) = 1$. Yani 2’nin B kümesinin elemanı olduğu kesindir. Küme klasik olsaydı da 2’nin B kümesinde olacağını tahmin edebilirdik. 3’ten büyük reel sayılar için üyelik derecesinin 0 olduğu da açıkça görülmektedir. Bu da, klasik küme teorisinde olduğu gibi, 3’ten büyük reel sayıların bu kümenin elemanı olmaması anlamına gelir. Ve işte işin eğlenceli kısmı da 1 ile 3 arasındaki değerler için başlıyor. Örneğin $(\mu_B(2.99), 2.99) = (0.01, 2.99)$ olup, 2.99 sayısı B kümesinin 0.01 derecede bir elemanıdır. Başka bir deyişle, bu sayı kümeye çok düşük bir derecede aittir. Görüldüğü üzere bazı değerler için kesin olarak eleman olmak ya da olmamaktan söz etmek mümkün değildir.

Fuzzy Küme Teorisi matematiğe çok büyük ve önemli bir bakış açısı katmıştır. Çünkü artık matematiğin “fuzzy (bulanık)” yaklaşımı, gerçek yaşamda “keskin” sınırlar nedeniyle ölçülemeyen pek çok durumu ölçmeye ve bu durumlara uygulanmaya olanak tanımaktadır.

Öyle ki eskiden mutlu olmak ya da olmamak varken, artık biraz mutlu olmayı ve biraz da mutsuz olmayı matematiksel olarak ifade etmek mümkün! Ne derler? Bir yerde hem var olup hem var olmamak pek de olası değildir. Oysa belki olduğunuz yer biraz da “fuzzy” dir.

■ Bir Fuzzy Kümenin Önemli Kavramları

Fuzzy kümelerin gerçek yaşam problemlerinde nerelerde ve nasıl kullanıldığını anlayabilmek için bazı temel kavram ve tanımlara değinmek gerekir. Şimdi bir fuzzy kümenin α -kesimleri, desteği, çekirdeği ve yüksekliği kavramlarına bakalım.

X evrensel kümesi üzerinde tanımlı A fuzzy kümesi verilsin. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere, üyelik değeri α değerinden büyük veya eşit olan $x \in X$ elemanlarının oluşturduğu kümeye, A fuzzy kümesinin α -**kesimi** denir ve

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde, üyelik değeri α değerinden **kesin** büyük olan $x \in X$ elemanların oluşturduğu kümeye ise **A fuzzy kümesinin kesin α -kesimi** denir ve

$$A_{\alpha+} = \{x : \mu_A(x) > \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımlar, fuzzy kümelerin en önemli kavramları arasındadır. Hem A_α hem de $A_{\alpha+}$ kümeleri keskin (klasik) kümelerdir ve α -kesimleri fuzzy kümelerden klasik kümelere geçişi sağlar.

Üyelik derecesi sıfırdan büyük olan tüm elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin desteği** denir. $Supp(A)$ veya $S(A)$ ile gösterilir ve

$$Supp(A) = \{x : \mu_A(x) > 0\} = A_{0+}$$

şeklinde ifade edilir.

$$Core(A) = \{x : \mu_A(x) = 1\}$$

kümesine **A fuzzy kümesinin çekirdeği** denir. Çekirdek, ölçülen veya tanımlanan özelliği belirten kümenin “kesin ve tartışmasız” kısmını temsil eder. Yani bu, ilgili elemanın söz konusu özelliğe veya tanıma %100 uyduğu anlamına gelir. Bir bakıma, çekirdek kümedeki elemanlar fuzzy kümelerdeki belirsizliğin en az olduğu durumu temsil eder.

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

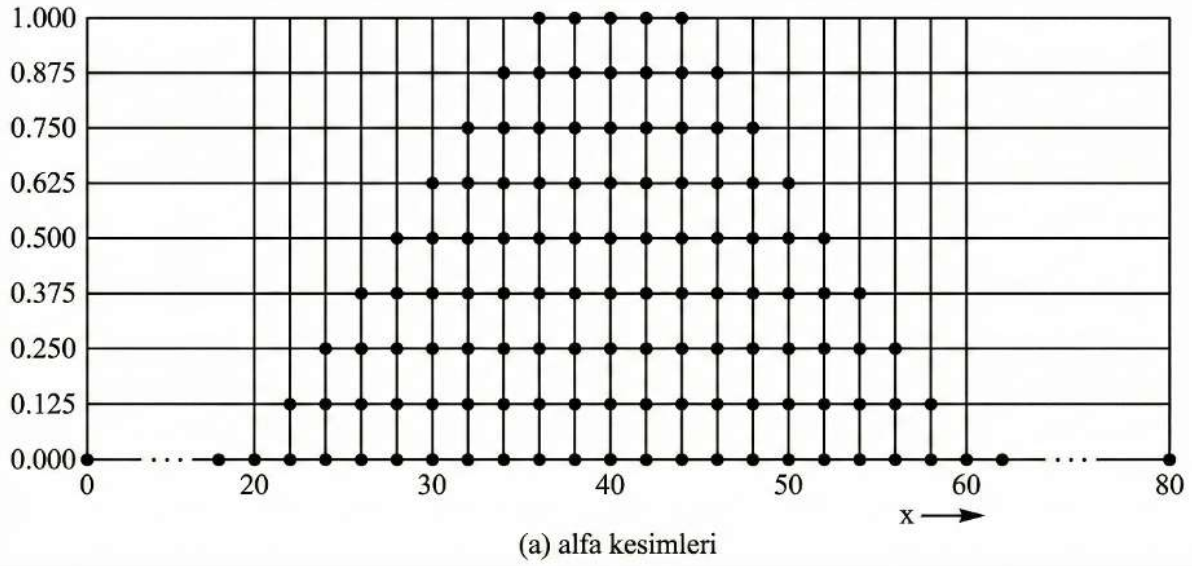
değerine **A fuzzy kümesinin yüksekliği** denir. Eğer $h(A) = 1$ ise A fuzzy kümesine **normal fuzzy küme**, $h(A) < 1$ ise **altnormal fuzzy küme** adı verilir.

■ Bir Fuzzy Kümenin Konveksliği

Bir fuzzy kümenin konveksliği, uygulamalarda ve fuzzy kümelerin aritmetik işlemlerinin tanımlı ve anlamlı olabilmesi açısından hayati öneme sahiptir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir fuzzy kümenin konveksliği,

$$\forall \alpha \in (0, 1]$$

için α -kesimlerinin her birinin konveks olması anlamına gelir. Bu kavramı daha iyi anlayabilmek için, aşağıda verilen α -kesimlere bakmak faydalı olacaktır.



Şekil 1. "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications - George J. Klir - Bo Yuan, 1995."

x -ekseni verileri, y -ekseni üyelik değerlerini belirtmek üzere, Şekil 1’de verilen α -kesimlerinin kümesi, tek bir tepe (zirve) oluşturur; başka bir deyişle, her α seviyesinde grafiği kestiğimizde tek parça bir aralık elde edilir. Bu anlamda konveksliğin geometrik yorumu bizim için oldukça önemlidir. Çünkü genellikle uygulamada konveks olmayan fuzzy kümelerle çalışmak anlamsızdır. Öyle ki, küme konveks değilse belirli bir α -seviyesinde iki veya daha fazla ayrıık aralık ve dolayısıyla birden fazla tepe (zirve) elde edilir. Bu durum ise birazdan vereceğimiz fuzzy sayı tanımına aykırıdır.

Reel sayılar üzerindeki fuzzy kümeler "uygulamada" kritik rol oynarlar. Bir A fuzzy kümesi, aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa “**fuzzy sayı**” olarak nitelendirilir ve bu sayede optimizasyon, yaklaşık çıkarımlar yapma ve kesin olmayan olasılıklarla çalışma gibi “belirsiz” gerçek hayat problemlerinde oldukça işe yarar.

$A, \mu_A(x): \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ üyelik fonksiyonuna sahip bir fuzzy küme olmak üzere

- i. A normal bir fuzzy kümedir,
- ii. $\forall \alpha \in (0, 1]$ için A_α kapalı bir aralıktır,
- iii. $Supp(A)$ sınırlıdır.

Bu koşullar altında, A fuzzy kümesi bir **fuzzy sayı** olur.

Eğer küme konveks değilse, bu tanıma göre fuzzy sayı da olamayacağından, uygulamada konveks olmayan fuzzy kümelerle çalışmak anlamsızdır. Çünkü konveks olmayan kümeler fuzzy sayı olamayacağı için toplama ve çıkarma gibi işlemleri yapmayı karmaşılaştırır. Özetle, sistem kararsızlaşır. Biz ise fuzzy sayılarla işlemler yaparak çıkarımlar üretmek ve gerçek hayat problemlerini yorumlamak istiyoruz. O halde şimdi biraz, fuzzy kümelerin ve fuzzy sayıların uygulamalarına değinelim.

Bir örnek üzerinden tüm bu tanımları daha iyi kavramak için endüstriyel soğutma sisteminde suyun ılıkliğini tanımlayan A fuzzy kümesini ele alalım. x değişkeni, suyun Celcius cinsinden sıcaklığını temsil etsin.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 10 \\ \frac{x-10}{20-10} & 10 < x < 20 \\ 1 & 20 \leq x \leq 30 \\ \frac{50-x}{50-30} & 30 < x < 50 \\ 0 & x \geq 50 \end{cases}$$

fonksiyonu A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu olmak üzere, A fuzzy kümesinin çekirdeği $Core(A) = [20, 30]$ aralığıdır. Bu aralık, suyun tartışmasız olarak ılık kabul edildiği kesinlik bölgesidir. $Supp(A) = (10, 50)$ yani kümenin desteği ise $(10, 50)$ aralığıdır. Bu, 10 derecenin altı kesinlikle soğuk, 50 derecenin üstü kesinlikle sıcak anlamına gelir. Eğer suyun en az %50 oranında ılık olduğu sıcaklık aralığını bulmak istersek burada $\alpha = 0.5$ değeri için $A_{0.5}$ kesimine bakmak gerekir. $A_{0.5} = [15, 40]$ bulunacaktır. Daha önce belirtildiği üzere bu küme keskin bir kümedir ve belirli bir güven aralığındaki sıcaklık derecesini belirtir. A fuzzy kümesinin konveks olduğu da rahatlıkla görülebilir. Çünkü 20 derece ve 30 derece ılıksa, 25 derece daha az ılık olamaz. $h(A) = 1$ 'dir çünkü üyelik fonksiyonu 20 ile 30 derece dahil olmak üzere bu aralıkta 1 değerini alır. Böylelikle A fuzzy kümesi normal bir fuzzy küme olduğundan, her bir α -kesimi kapalı aralık olduğundan ve $Supp(A)$ sınırlı olduğundan bir fuzzy sayı olur.

■ Fuzzy Kümeler ve Gerçek Yaşam

Birçok teorik bilgi ve tanımdan sonra artık nihayet fuzzy kümelerin hayatımızda nelere dokunduğuna ve neleri değiştirdiğine değinmenin vakti geldi. Yüzyıllar boyunca matematik, yalnızca “kesin” ve “net” olanın bilimi olarak görülmüştür. Elbette optimizasyon, olasılık teorisi gibi alt dallarda yaklaşımlar ya da tahminler hep söz konusuydu. Fakat çoğu sistem hâlâ klasik kümelerle işliyordu. Bu da, “kısmen”, “biraz”, “oldukça” gibi ifadelerin matematikte tam karşılığını bulamaması anlamına geliyordu.

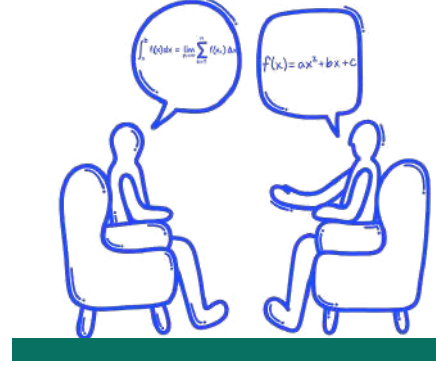
Oysa matematik, insanlığın temel bilimlerinden biri ise, insani duyguları ve insani eylemleri de ifade edebilmeliydi. Nitekim öyle de oldu. 1965 yılında Prof. Dr. Lotfi A. Zadeh'in “Fuzzy (Bulanık)” kavramını ortaya atması, matematikte bir dönüm noktasıydı. Bugün, makinelerin “insan gibi düşünebilmesinin” temelinde bile hayati bir rol oynuyor Fuzzy Matematik. Örneğin 1980'lerin sonunda geliştirilen Japon metrosu Sendai'de, trenin hızını ve duruşunu kontrol etmek için fuzzy mantık ve fuzzy sistemler kullanılır. Öyle ki, trende yolculuk yapan insanların tren kalkış ve duruşlarında hiçbir yere tutunmadan seyahat edebilmesi mümkündür. Çünkü tren, istasyona ‘az’ mesafe kaldıysa, hız ‘biraz’ yüksekse gibi fuzzy ifadeleri algılama, bu verileri fuzzy sistemler kullanarak yorumlama mantığı üzerine çalışmaktadır. Bu sayede hem ani gaz ve fren gibi enerji verimliliğini düşüren manevralar yapmaz hem de konforlu bir yolculuk sağlamış olur.

Ve nihayetinde, fuzzy matematik yalnızca makinelerin düşünebilmesini sağlamakla kalmaz, aynı zamanda insan duygu ve düşüncelerini de matematiksel olarak ifade etmeye olanak sağlar. Çünkü her şeyin ve herkesin içinde “biraz iyilik” ve “biraz da kötülük” yok mudur? Aslında hayattaki çoğu şey “fuzzy” değil midir? Hayatımızdaki insanların iyi mi yoksa kötü mü, dürüst mü yoksa yalancı mı olduğuna karar verirken dahi aslında farkında olmadan kendi kriterlerimizin α - kesimlerini kullanırız. Bu düşüncenin arkasında da matematiğin psikolojiye uygulanması yatar. Günümüzde çözdüğümüz kişilik testlerinde, ruh halimizi ve hislerimizi belirlemede bile fuzzy kümeler rol oynar. Bir kavramın, bir teorinin bir bilimi ve hatta diğer bilimleri ne kadar geliştirebileceğinin en keskin örneklerinden biridir bu.

■ Kaynaklar

- [1] George J. Klir, Bo Yuan; Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, 1995.
- [2] Prof. Dr. İ. Burhan Türkşen; Dereceli (Bulanık) Sistem Modelleri, 1. Baskı, Ekim 2015.

Matematik Söyleşileri



Bu sayıda gerçekleştirdiğimiz söyleşide, Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Metin Gürses ile matematik ve fizik arasındaki yakın ilişki üzerine konuştuk. Sohbetimiz, matematiksel düşüncenin fiziksel problemlerle nasıl iç içe geçtiğini; farklı alanlardan beslenen bir akademik yolculuğun zamanla nasıl ortak bir dile dönüştüğünü ortaya koyuyor. Bilimsel çalışmaların yanı sıra, merak duygusu, araştırma kültürü ve uzun soluklu bir akademik serüven de bu röportajın önemli durakları arasında yer alıyor. Okuyucularımızın bu söyleşide, kendi yolculuklarına eşlik edecek tanıdık ve ilham verici izler bulmasını diliyoruz.

Selcan Şenyurt: Hocam, bu röportaj için çeşitli sorular hazırladım ancak şu an biraz heyecanlıyım, bu durumu mazur görmenizi rica ediyorum. İsterseniz çocukluğunuzdan başlayalım. Nasıl bir öğrenciydiniz? Bilmeye olan merakınızı tetikleyen neydi? İçinizdeki o bilim kıvılcımı nasıl yandı? Çocukluk yıllarınızı, öğrencilik hayatınızı merak ediyorum.

Metin Gürses: Sıradan bir ailenin çocuğuyum. İlkokulu memleketimde okudum. Ortaokul ve lise dönemine geldiğimde, babam abimi okutabilmek amacıyla Ankara'ya taşınma kararı aldı. Tam tarihi net hatırlamakla birlikte 1950'lerin ortaları, 1955 civarıydı. Ortaokul ve liseyi Ankara Atatürk Lisesi'nde tamamladım. Bilhassa lise yılları, hayata dair farkındalığımın arttığı, neyin ne olduğunu anlamaya başladığım bir dönemdi. Tabii bunda öğretmenlerin katkısı yadsınamaz. Özellikle ismini hâlâ saygıyla andığım matematik öğretmenimiz Maşuk Bey vardı; tarzı, kendine güveni ve ders işleyişiyle öğrencilerin çoğunu matematiğe ve hiç alakaları olmasa bile fiziğe yönlendirirdi. O dönemden birçok arkadaşım sonradan bu alanlara eğildiler. Lise hayatımda matematikte başarılı, diğer derslerde ise standart bir öğrenciydim. O yıllarda gazetelerde çıkan bilim haberleri, tanınmış fizikçilerin TÜBİTAK Bilim Ödülü törenlerindeki konuşmaları dikkatimi çekti. Atom, atom fiziği gibi kavramlar o yaşlardaki çocukların ilgisini cezbediyordu. Yanlış hatırlamıyorsam Feza Gürsey'in bir ödül törenindeki konuşması beni çok etkilemişti. Bunun yanında diğer bilim insanlarının biyoloji ve kimya alanındaki çalışmaları da yavaş yavaş zihnimde yer etmeye başlamıştı. İyi bir lise eğitimi aldıysanız, kendi alanınız olmasa bile diğer disiplinlerden de anlayabiliyorsunuz. Sonrasında ODTÜ'ye girdim. Hazırlık sınıfını atladıktan sonra birinci sınıfta matematiği değil, fiziği seçtim. Bahsettiğim o yan etkiler kararımı şekillendirdi ve tercihim fizik oldu.

Başlangıçta ortalama bir öğrenciydim; çok şaşalı bir başarı grafiğim yoktu. Ancak 3. ve 4. sınıftan sonra bazı konularda kendimi daha yetenekli hissederek o alanlara yönelmeye karar verdim. Matematiksel fizik, kuantum mekaniği ve rölativite (görelilik) gibi konular... Mezuniyet dönemimiz olan 1969 yılı, ODTÜ'de 68 olaylarının tam göbeğinde olduğumuz bir süreçti. Boykotlar olur, dersler kesilir, bu yüzden mezuniyetler uzardı. Normalde Haziran'da mezun olmamız gerekirken Kasım veya Aralık aylarında mezun olmak zorunda kalmıştık. Tüm bunlara rağmen mezun oldum.

Yüksek lisansımı yine ODTÜ'de yabancı bir hocayla çalışarak tamamladım. Ancak aklımda hep kuantum ve rölativite üzerine çalışmak vardı. O sırada Feza Gürsey'in ODTÜ'ye geleceğini duydum. Feza Bey, 1960'ların başından itibaren Amerika'da Yale Üniversitesi'ndeydi ancak orayla anlaşmasına ara verip (izin alarak) Türkiye'ye, ODTÜ'ye gelmek istemişti. Feza Bey'in şöyle bir sistemi vardı: Bir sene ODTÜ'ye gelir, birkaç sene Yale'de kalır ve yanında beğendiği öğrencileri de götürürdü. Şansıma, yüksek lisansı bitirdiğim

sene Feza Bey ODTÜ'ye geldi. Aslında kendisiyle daha önce, lisans 4. sınıfta bize kuantum mekaniği dersi verdiğinde tanışmıştık ama ne zaman döneceğini bilmiyordum. Doktora eğitimime onunla devam etmeye karar verdim ve rölativite konusunda tez çalışmasına başladım. Geldiği sene verdiği derslerin hepsini aldım. ODTÜ'de tez projem için bana bazı makaleler vererek hazırlık yapmamı istedi. Ardından 1972-73 yıllarında birlikte Yale Üniversitesi'ne gittik. Orada bir buçuk sene kadar kaldım ve tez çalışmamı tamamladım. Gittiğimde evliydim, bir kızım vardı; ailecek gitmiştik. Dönüşte tezimi ODTÜ'de savundum ve Feza Bey danışmanlığında doktora programımı tamamlamış oldum. ODTÜ'de asistan profesör (yardımcı doçent) olarak akademik hayata devam ettim. Eğitim sürecim bu şekilde tamamlandı.

SŞ: Gerçekten çok etkileyici bir süreç. Hemen arkasından şunu sormak istiyorum: Çukurova Üniversitesi, TÜBİTAK, Max Planck Enstitüsü gibi birbirinden çok farklı kurumlarda bulundunuz. Bu çeşitliliğin araştırmacı kimliğinizi nasıl etkilediğini merak ediyorum.

Bilimde bir yerde sabit kalıp orada devam etmeyi tercih edenler ve bu şekilde başarılı olanlar var. Ancak benim tercihim bu yönde değildi. Farklı yerlerde, farklı uzmanlarla çalışıp, aynı konuda kalmakla beraber farklı metotlar ve yaklaşımlar öğrenmenin yararlı olduğunu düşündüm. 1970'lerin sonunda Almanya'nın Alexander von Humboldt Vakfı gibi özel bir burs programı vardı, ona başvurudum. Ev sahibi bir profesörle proje hazırlayıp sunuyorsunuz, kabul edilirse o enstitüde çalışıyorsunuz. Münih'te tanıdığım bir hoca vardı, onunla projeyi hazırladık ve Max Planck Enstitüsü'nde yaklaşık iki buçuk sene kaldım. Eşim, kızım ve o dönem doğan oğlumla birlikte çok verimli bir dönem geçirdik. Yabancı meslektaşlarımla birçok proje tamamladık, makaleler yazdık.

Yurt dışındaki enstitülerde bulunmak güzel ama Türkiye'de akademik bir hiyerarşi var ve bunu tamamlamanız gerekiyor; doktoradan sonra yardımcı doçent, doçent ve profesörlük aşamaları gibi. Yaşım daha fazla ilerlemeden doçent olmaya karar verip ODTÜ'ye döndüm. Fakat 1980'lerin başı, yani 81-82 yılları zorlu bir dönemdi. Bizi etkileyen birkaç faktör vardı. Birincisi, henüz doğal gaz gelmediği için Ankara'da hava kirliliği çok kötüydü. Kızım okuldan geldiğinde elini yüzünü yıkarken suyun simsiyah aktığını görürdük, bu da hastalık endişesi yaratıyordu. İkincisi, YÖK (Yükseköğretim Kurulu) kurulmuştu ve akademik yükselme şartları değişmişti. Bu şartlar altında, Türkiye'de bağımsız bir yapısı olan Kocaeli Gebze'deki TÜBİTAK Marmara Araştırma Enstitüsü'ne (MAM) gitmeye karar verdim. Orada İstanbul Teknik Üniversitesi'nden Prof. Dr. Erdoğan Şuhubi'nin başında olduğu, uygulamalı matematik alanında çalışan bir grup vardı. Kendisiyle görüştim, beni memnuniyetle davet etti. Enstitünün 500 metre ilerisinde mükemmel lojmanları vardı, çocuklar için harika bir ortamdı. Orada 7-8 sene kaldık ve çok başarılı bir dönem geçirdik.

Ancak enstitülerde akademik unvan (doçentlik, profesörlük) alamıyorsunuz. Ya İstanbul'a gidecektim ya da Çukurova Üniversitesi'ndeki arkadaşların davetini değerlendirecektim. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi dekanından da davet almıştım fakat eşim İstanbul'da yaşamının zorluklarından, kira ve geçim sıkıntısından çekindiği için Çukurova Üniversitesi'ne gitmeye karar verdik. Orada yaklaşık üç buçuk sene kaldık.

Ardından Bilkent Üniversitesi'nden davet aldığımızda Çukurova maceramız sona erdi. Kızım o sırada ODTÜ Matematik Bölümü'ne başlamıştı, oğlum da eğitimine devam ediyordu. Çukurova'da da kampüs hayatı ve lojman imkanları fena değildi ama Bilkent'in araştırma olanakları daha geniş olduğu için ve Ankara'ya dönme isteğimizle bu teklifi kabul ettik.

SŞ: Sizi dinlerken şunu düşündüm; bazen bir karar verirken, örneğin bir kursa başlamak veya bir yere gitmek gibi, o süreç gözümüzde çok büyüyor. "İki sene nasıl geçecek?" diyoruz. Ama sonra bakıyoruz ki hayatın akışında o iki sene sadece bir basamakmış, değil mi?

Çok doğru. Ancak bizim hayatımızda kararları tek başıma vermiyordum. Eşimle birlikte bu mücadeleye girdik. Sağ olsun, eşim her konuda düşüncelerime saygı gösterir. Gitmek istediğimi bildiğinde, kendi düzeyini bozacak olsa bile "Ben de istiyorum" derdi. Akademik hayatta bu tür değişiklikler bazen zorunludur. Şu ana kadar verdiğimiz kararlardan ve yaptığımız değişikliklerden hiç pişmanlık duymadık.

SŞ: Yani "Her başarılı erkeğin arkasında bir kadın vardır" sözünü doğrulayabilir miyiz?

Eşim bundan çok daha fazlasıdır.

SŞ: Harika hocam. Makalelerinize geçmeden önce, disiplinler arası çalışmalarda sizi en çok besleyen iş birliğinin hangisi olduğunu sormak istiyorum.

Fizikte bazen "moda" olan konular önemlidir. Benim asıl çalışma alanım Genel Görelilik (Rölativite). 1982'lere kadar yaptığım çalışmaların çoğu rölativite üzerinedir ve o dönemki güncel problemlere yöneliktir. Özellikle Feza Bey ile yaptığım doktora tezime kaynak olan çalışma literatürde çok iyi bilinir. Yaptığımız işi şöyle özetleyebilirim: Fizikte "Einstein Alan Denklemleri" dediğimiz, Einstein'ın 1915'te kurduğu teoriyi tanımlayan bir denklem sınıfı vardır. Newton veya Maxwell denklemleri gibi... Ancak bunlar matematiksel olarak çok karmaşıktır. Bilim insanları, ilgilendikleri bölgeyi küresel veya eksensel simetrik varsayarak bu denklemleri basitleştirmeye çalışır. Örneğin Güneş sistemini inceliyorsanız, bu simetri varsayımları yanlış olmaz. Bizim yaptığımız, bu varsayımlarla denklemleri basitleştirip kesin çözüm metotları türetmek ve yorumlamaktır.

1982'den sonra ise kullandığımız tekniklerin matematiksel altyapısına, yani uygulamalı matematiğe daha fazla eğildim. "Mevcut teknikler yerine yeni teknikler geliştirebilir miyiz?" sorusu bizi uygulamalı matematiğe yöneltti. Geliştirdiğiniz bu yeni teknikler başka alanlarda da kullanılabiliyor. Böylece 1982 sonrasında ağırlıklı olarak uygulamalı matematik alanına adım atmış oldum.

SŞ: Hocam notlarıma göre; "İntegrallenebilir Sistemler" üzerine çalışmalarınız var. Bu sistemler, ilk bakışta karmaşık veya kaotik görünen yapıların, aslında belirli dönüşümler altında bir düzen ve çözülebilirlik barındırdığını gösteriyor. Sizin bu alandaki çalışmalarınızı "karmaşanın içindeki düzeni aramak" olarak yorumlayabilir miyiz?

Einstein denklemleri, dört boyutlu uzay-zamanda on tane bilinmeyen olan çok karmaşık diferansiyel denklemlerdir. Einstein bunu 1915'te ortaya koyduğunda çözmek neredeyse imkansızdı, bu yüzden uzun süre kimse dokunamadı. Bu denklemler yerine değişik teoriler sunanlar, yanlış diyenler oldu. Zaman zaman, özellikle TÜBİTAK'tayken, "Einstein'ın teorisini çürüttüm" veya "Yeni denklemler buldum" diyen mektuplar alırdık. Ancak bu teoriyi anlayabilmek ve üzerine konuşabilmek için çok ciddi bir matematik ve fizik altyapısı (Advanced Calculus, Diferansiyel Denklemler, Kısmi Diferansiyel Denklemler Diferansiyel Geometri, Riemann Geometrisi vb.) üstüne bir de doktora derecesi almış olması gerekir. Bu altyapıya sahip olmayanların iddialarının bilimsel bir geçerliliği olmuyor. Bugün arabesk müzik yapan birisi Bach'ı anlayabilir mi?

Dönelim araştırmacı olarak buralarda neler yapılabilir? Araştırmacı olarak bizim yaptığımız, Newton teorisinin açıklayamadığı, kozmoloji mertebesinde veya büyük kütleli objeler civarındaki olayları açıklayacak modeller üretmektir. Son 10-15 yılda rölativite tekrar popülerleşti; çünkü LIGO gibi gözlemlemlerinde kütleçekimsel (gravitasyonel) dalgalar gözlemlendi. Diğer yandan evrenin hızlanarak genişlediği tespit edildi. Einstein'ın teorisi kütleçekimsel dalgaları açıklıyor ancak evrenin hızlanarak genişlemesini mevcut haliyle tam olarak açıklayamıyor. Bu yüzden "Teoriyi nasıl genelleyebiliriz ki bu gözlemleri de kapsasın?" sorusu güncel problemlerden biridir.

SŞ: İntegrallenebilir sistemlerin kuantum versiyonlarıyla ilgileniyormuşsunuz. Bir gün klasik fizikle kuantum fiziğini ortak bir dilde, yani "Her Şeyin Teorisi"nde buluşturabilecek miyiz?

İnşallah. Fizikte iki çok başarılı teori var: Kuantum mekaniği ve Genel Görelilik. İkisi de kendi alanlarında deneylerle doğrulanmış durumda. Kuantum fiziğinin sadece mikroskobik dünyada (atom altı) geçerli olduğuna inanılırdı ancak son Nobel ödülü alan çalışmalar, makroskobik dünyada da kuantum etkilerinin (örneğin dolanıklık, tünelleme) gözlemlendiğini gösterdi. Diğer taraftan kütleçekimsel dalgaların gözlemlenmesi de Einstein'ın teorisini doğruladı. İki kara deliğin çarpışması sonucu toplam kütleinin bir kısmının enerjiye dönüşüp dalga olarak yayıldığını ölçebildik. O ölçümü yapanlar Nobel Ödülü aldılar. Onun da çok

ilginç bir hikayesi var, sonra başka bir zaman anlatırım inşallah. Kolay değil ama inatçı ve konuyu çok iyi bilen birisi olman gerekiyor. O inat sayesinde bu gravitasyonel dalgaları gözlemleyebildiler.

Şimdi bu iki başarılı teori birleşebilir mi? Birçok fizikçi bu iki teorinin birleşmesi gerektiğine inanıyor. Doğadaki dört temel kuvvetin (zayıf, elektromanyetik, güçlü ve kütleçekim kuvvetleri) birleştiği bir "Her Şeyin Teorisi" nihai hedef. Ancak son zamanlarda bu konuda çalışan sayısı azaldı. Çünkü böyle bir teori kurulsa bile doğruluğunu test edecek teknolojiye ve deney imkanlarına şu an sahip değiliz. Belki evrenin başlangıcındaki koşullarda bu birleşme gerçekleşmişti. Bu nedenle 8-10 sene önceki heyecan biraz azalsa da, bu hâlâ bilimin önünde açık bir soru olarak duruyor.

SŞ: Hocam bir de eğrilerin yüzey üzerindeki hareketleriyle (motion of curves) ilgili bir çalışmanız var. Notlarımda şöyle bir ifade var: "Bir eğrinin evrimiyle bir dalga denkleminin evrimi aynı matematiksel kalıba girebiliyor." Fizikteki hareketin matematikte bir deformasyon olarak karşılık bulmasını nasıl açıklarsınız?

Fizikteki pek çok olay dalga hareketiyle açıklanır. Bir ipin titreşimi, suyun yüzeyindeki dalgalanma veya dumanın hareketi... Matematikte "Dalga Denklemi" veya "Isı Denklemi" gibi kısmi diferansiyel denklemler bu olayları modellememizi sağlar. Matematikçi olarak biz sırf merakımızdan, bu denklemin çözümünün varlığıyla, çözüm metotlarıyla ve yapısıyla ilgileniriz. Denklemin su dalgasını mı yoksa gaz hareketini mi temsil ettiği fizikçinin yorumudur.

Benim çalıştığım alanlardan biri de diferansiyel denklemlerin "integrallenebilir" olup olmadığıdır. Eğrilerin hareketi ile bazı lineer olmayan denklemler (örneğin Schrödinger denklemi) arasında matematiksel bir ilişki vardır ve bu da integrallenebilir sistemlerin bir parçasıdır. Eğer bir denklem sistemi integrallenebilirse, çözüm bulmak için bildiğimiz standart metotları uygulayabiliriz. Ancak integrallenemeyen sistemler için bu kadar şanslı değiliz. Son 30-40 yılda uygulamalı matematikte "İntegrallenebilir Sistemler" diye bir alan oluştu. Ben de Einstein denklemleriyle bu integrallenebilir denklem problemlerini birleştirmek üzerine epey zaman harcadım.

SŞ: Peki hocam, bu yoğun akademik çalışmaların dışında Metin Gürses kimdir? Hobileriniz nelerdir, neler yapmaktan hoşlanırsınız?

Açıkçası pek boş vaktim yok, zihnim neredeyse 24 saat projelerle meşgul. Bir probleme odaklandıysam çözene kadar kafamdan atamıyorum. Evde de ruh gibi dolaşırım. Tabii burada eşimin bana çok büyük bir desteği oldu hayat boyu, 80 yaşını aştık hala da öyle. Eşimle birlikte yürüyüş yapmayı severim; günde bir, bir buçuk saat yürürüz. Klasik müziği ve Anadolu türkülerini severim. Satranç oynamaktan ziyade satranç problemleri çözmekten hoşlanırım ama arada bilgisayarda kafa dağıtmak için oynadığım da olur.

SŞ: Yurt dışında çok bulundunuz. Farklı kültürler ve ortamlar size neler kattı?

Akademik dünyada yurt içi veya yurt dışı çok fark etmiyor. Örneğin Max Planck Enstitüsü'nde en yakın arkadaşlarım Yunanlıydı. Bilimin en güzel yanı budur; milliyet farkı ortadan kalkar, ortak dil bilim olur. Bir problem üzerinde çalışırken kimin Türk, kimin Yunanlı olduğu aklımıza bile gelmez. Kültürel olarak Akdeniz ülkeleriyle çok benzeşiyoruz. Almanların ayrı bir kültürü var. Bazı akşamlar bira içmeye giderlerdi ben gitmezdim mesela. Bira severim ama onlar aşırı içiyorlar. Ondan sonra zaten fizikmiş, biyolojiymiş, bilimmiş... :)

SŞ: :) kalmıyor doğru. Hocam, TÜBİTAK, enstitüler ve çalıştığınız gruplardaki geçmişinize de dayanarak, Türkiye'de temel bilimlerin yeri ve araştırma koşulları hakkında ne düşünüyorsunuz? Siz ve sizin gibi bu denli çok ve değerli bilim insanlarımız varken neden istenilen seviyede değiliz?

Bu, üzerine çokça düşünülmüş ve yazılmış, başlı başına ayrı bir konu. Size kısa bir tarihçe anlatayım, sonucuna siz karar verin.

Doktoramı tamamlayıp tez savunması için ODTÜ'ye döndüğümde, rölativite (görelilik) alanında bir grup oluşumu başlamıştı. Amerika'dan, Maryland Üniversitesi'nden gelen Yavuz Nutku da ODTÜ'ye katılmıştı;

o da rölativite üzerine çalışıyordu. Yavuz Bey'in doktora öğrencileri, ben ve sonradan aramıza katılan Tekin Dereli ile birlikte 1975-80 yılları arasında çok güzel bir grup oluşturduk. Çok nitelikli çalışmalar yapıldı ve grubumuz yurt dışında da tanınır hale geldi. Ancak maalesef Türkiye'nin o dönemki zorlu şartları ODTÜ'ye de yansıdı. 1975-80 arası hayat pek kolay değildi. Birçok arkadaşımız ayrılmak zorunda kaldı ve grubumuz dağıldı; ekibin yarısı Boğaziçi Üniversitesi'ne geçti. Dolayısıyla bu grup devamlılığını sağlayamadı.

Ben Max Planck Enstitüsü dönüşünde, daha önce bahsettiğim gibi Gebze'deki TÜBİTAK Marmara Araştırma Enstitüsü (MAM) Matematik Bölümü'ne geçtim. Benden sonra, İstanbul'a giden arkadaşlar da oraya geldiler ve aynı grubu orada tekrar kurduk. Ekibe yeni katılanlar da oldu; onlar Fizik Bölümü'ndeydi, ben Matematik Bölümü'ndeydim. Hem uygulamalı matematikte hem de rölativitede Türkiye'de "tek" diyebileceğim çok nitelikli bir grup meydana geldi. Fakat yine ülke şartları ve TÜBİTAK'ın iç dinamikleri nedeniyle bu birliktelik de uzun sürmedi. Ben profesörlük kadrosu için Çukurova Üniversitesi'ne geçtim. Benden sonra diğer arkadaşlar da yavaş yavaş ayrıldı ve o grup da eridi. ODTÜ'deki oluşum yaklaşık 5 sene, Gebze'deki ise en fazla 10 sene yaşayabildi ve sonunda tamamen dağıldı.

Gebze'deki o oluşum beni çok etkilemişti. Eşimle birlikte, "Emekli olunca buraya geri döneriz" hayalleri kuruyorduk. Ancak biz emekli olamadan o yapı kendiliğinden dağıldı. Orası gençler için nefes alabilecekleri, uzmanlarla çalışıp kendilerini geliştirebilecekleri harika bir ortam, çok güzel bir modeldi. Ama sürdürülemedi. Bizdeki başarılar ne yazık ki genellikle bireysel başarılardır. Evet, zaman zaman böyle "tomurcuklanmalar", gruplaşmalar oluyor ama bir dış etken gelip o tomurcuğu bozuyor. Bilkent'te benzer bir gruplaşma oldu mu emin değilim; ben matematikte tek başımaydım ancak zamanla öğrencilerimle birlikte kadromuz biraz genişledi. Şimdi yavaş yavaş böyle bir oluşum olabilir diye düşünüyorum, inşallah ömrü uzun olur.

Tabii temel bilimlerin durumu, genel olarak siyasi iktidarların öncelikleri arasına girip girmediğiyle ilgilidir. Şimdiye kadar maalesef bu öncelikler arasına girmedi. Sadece üniversite araştırmaları değil, genel bütçeden eğitime ayrılan payın oranı bile düşmeye devam ediyor. Bu şartlarda büyük beklentilere girmek doğrusu biraz hayalcilik olur.

SŞ: Bu durum elbette tartışmaya açık ama gençlerin gitmek istemesi bir noktaya kadar anlaşılır. Sadece bilimsel gelişim değil, düşen yaşam standartları da bunda etkili. Peki hocam, sizin zamanınızda sizi tekrar Türkiye'ye çeken tam olarak neydi? Eminim yurt dışında kalsaydınız orada da çok büyük başarılar elde ederdiniz.

Bunun birkaç sebebi var. Birincisi ve belki de en önemlisi akademik kariyer basamaklarıydı. Üniversiteye dönüp doçentlik ve profesörlük unvanlarını almak istedim. Yurt dışında çalıştığım yerler genelde araştırma enstitüleriydi. Enstitülerde üniversitelerdeki gibi bir akademik unvan/promosyon sistemi yoktur. Yale'de bulunduğum dönemde zaten doktora öğrencisiydim, Princeton'da ise 3-4 ay gibi kısa bir süre kaldım. Dolayısıyla akademik unvanlarımı alabilmek için üniversiteye dönmem gerekiyordu.

Diğer önemli etken ise zorunlu askerlik hizmetiydi. Belirli bir yaşa gelince bu bir zorunluluk oluyor ve kararlarınızı etkiliyor. Hatta tez danışmanım Feza Bey, "Burada kal, sana iş buluruz, devam edersin" teklifinde bulunmuştu ama kalmadım. Askerlik çağım gelmişti. Belki tecil ettirilebilirdi ama ben dönüp bu yükümlülüğü yerine getirmeyi seçtim.

SŞ: Genç araştırmacılara veya öğrencilerine nasıl bir yol haritası tavsiye edersiniz?

Tercihini yapmış üniversite öğrencileriyle konuşmak başka, henüz lise sıralarındaki öğrencilerle konuşmak bambaşka bir şeydir. Liseden mezun olma aşamasındaki gençlere tavsiyem şudur: Aklınızda, gönlünüzde ne varsa onu yapın. Kimseyi, hatta anne ve babanızı bile bu konuda dinlemeyin. Kendi iç sesinize kulak verin.

Bunu tecrübelerime dayanarak söylüyorum; ben 1991 yılında Bilkent'e geldim, yaklaşık 35 senedir buradayım. İlk 10 yıl üniversiteyi tanıtmak için Ankara, İstanbul, İzmir, Adana, Konya gibi pek çok şehri gezdik, liseleri ziyaret ettik. O dönem edindiğim izlenim şuydu: Çok parlak öğrenciler yanıma gelip, "Hocam ben matematik okumak istiyorum ama babam istemiyor", "Fiziğe gelmek istiyorum ama annem 'Tıp oku' diye baskı yapıyor" diyorlardı. Bu tür öğrencilerin bazıları, ailelerinin istediği bölümleri, örneğin

Elektrik-Elektronik Mühendisliğini seçtiler ama içlerindeki tutkuyu söndürmeyip Fizik veya Matematik ile Çift Ana Dal (ÇAP) yaparak çözüm buldular. Ancak böyle bir çıkış yolu bulamayanların çoğu ya başarısız oluyor ya da okulu bitirse bile hayattan keyif almıyor, mesleğinde mutsuz oluyor.

İster fizik, matematik, kimya, biyoloji gibi temel bilimler olsun, ister sanat veya spor olsun; bir genç lise yıllarında kendisini bir alanda yetenekli görüyorsa o yoldan devam etmeli. Bizim toplumumuzda aileler çocukları spora veya sanata yöneldiğinde "Çocuk elden gitti, geleceği yandı" gözüyle bakıp yakınlılar. Oysa durum hiç de öyle değil; Kadın Voleybol Takımımızın uluslararası başarıları ortada. O nedenle lise öğrencilerine net tavsiyem: Kendinizi neye yetenekli hissediyorsanız, hiç çekinmeyin, o yolda yürüyün. Sevmediğiniz bir bölümü belki bitirirsiniz ama mutlu olamazsınız.

Üniversiteye gelmiş, bölümünü seçmiş öğrencilere gelince; onlar bazen birinci veya ikinci sınıfta "Ben şimdi ne yapayım?" diye soruyorlar. Onlara verdiğimiz tavsiyeler daha standart akademik yönlendirmeler oluyor; "Şu dersi al, bu programa bak" gibi. O öğrencinin fiziğe veya matematiğe gerçekten yetenekli olup olmadığını başta bilemeyiz. Bu durum genellikle birinci sınıfın sonunda, hatta üçüncü ve dördüncü sınıfta daha belirgin hale gelir. Kariyerlerine dair asıl kararı o olgunluğa eriştiklerinde kendileri veriyorlar.

SŞ: Teşekkür ederim. Hocam, dünyanın gidişatı, bilim ve teknolojinin ilerleyişi kadar bilimdeki etik ihlaller de sıkça gündeme geliyor. Özellikle bilimsel etik konusundaki görüşlerinizi merak ediyorum.

Selcan, bahsettiğin etik tartışmaların ve bazı olayların biraz dışındayım, o yüzden bu konuda çok iddialı şeyler söylemem doğru olmaz. Ancak kendi alanımdaki muazzam bilimsel ve teknolojik gelişmelerden bahsedebilirim.

Bugün dünyada kurulu laboratuvarların, konumlarından ve çevresel gürültüden kaynaklı belirli bir hassasiyet sınırı var. Bazı hassas deneyleri yeryüzünde yapma imkanımız yok. Örneğin, az önce kütleçekimsel (gravitasyonel) dalgaları gözlemlediğimizden bahsettik. Bunu nasıl başardık biliyor musun? Bir cismin $1/10^{20}$ santimetre hareket ettiğini tespit ettiler. $1/10^{20}$ santimetre demek, pratikte sıfır demektir. Ancak geliştirilen teknolojiyle cisimlerin bu kadarcık titreşimini bile ispat ettiler. Kütleçekimsel dalga geçerken, cismin bulunduğu yerden bu kadar minik bir sapma yaptığını sadece bir laboratuvar değil, birçok merkez aynı anda gözlemledi. Hassasiyet ve teknoloji çok ileri safhalarda.

Yine de evrendeki bazı olayları anlamak için yeryüzündeki laboratuvarlar yeterli olmuyor. Bu yüzden yavaş yavaş uzaya, dünyanın yörüngesine istasyonlar kuruluyor. Bunlardan biri de LISA (Laser Interferometer Space Antenna) projesi. Bu projede uydular, uzayda dev bir eşkenar üçgenin köşeleri gibi konumlanacak ve aralarında lazer ışınlarıyla iletişim kuracaklar. Dünyadan algılayamadığımız pek çok rölativistik astrofizik olayını LISA sayesinde gözlemleyebileceğiz.

Ayrıca şu ana kadar biz evrenin, o sonsuz büyüklüğün sadece bir kısmını görebiliyoruz. Neden? Çünkü sadece bize ulaşan elektromanyetik dalgaları (radyo dalgaları, gama ışınları, görünür ışık vb.) kullanıyoruz. Teleskoplarımızla bu dalgaları toplayıp oralarda neler olduğunu anlamaya çalışıyoruz. Fakat evren o kadar büyük ki, ışığın bize ulaşması milyonlarca yıl sürüyor. Peki, ışığın bile ulaşamadığı veya perdelendiği o öte tarafları nasıl göreceğiz? İşte o zaman kütleçekimsel dalgaları, uzay tabanlı istasyonları ve yeni nesil teleskopları kullanacağız. Bilim dünyası şu an bunlarla uğraşıyor.

Bir diğer konu da –ki bu biraz bilim kurgu sınırlarına girebilir– Güneş sistemimizin ömrünün sonlu olmasıdır. Belirli bir zaman dolduktan, yaklaşık 5 milyar yıl geçtikten sonra Güneşimiz ömrünü tamamlayacak; genişleyerek (Kızıl Dev evresi) gezegenleri yutacak ve sonunda bir Beyaz Cüce'ye dönüşecek. Bu süreçte Dünya ve diğer gezegenler yaşanmaz hale gelecek veya yok olacak. Bu nedenle insanlığın, Güneş sistemindeki o genişleme başlamadan önce burayı terk etmiş olması gerekiyor. Bunu nasıl yapacağız? Uzay istasyonları kurarak ve bu sayede uzay boşluğunda kendine yetebilen sistemlerle yeni yerleşim yerlerine giderek.

Öncelikli hedef Güneş sisteminden kurtulmak olmalı. Peki kurtulunca iş bitiyor mu? Hayır, yeni ve genç bir yerleşim yeri bulmamız lazım. Sadece bizim galaksimizde binlerce, evrende ise milyonlarca güneş sistemi var. Bunların kimisi bizden genç, kimisi yaşlı. Bizden yaşlı olan sistemlerde muhtemelen yaşam formları gelişmiştir, hatta medeniyetleri bizden çok daha ileri olabilir. Bizden genç olan sistemlerde ise belki bizim geçmişimize benzer ilkel yaşam formları bulunabilir. "Dünyada canlılar oluştuysa başka yerde oluşamaz"

diye bir kural yok. Aynı kimyasal bileşenler, aynı elementler ve benzer fiziksel şartlar varsa, yaşamın oluşması mümkündür. İnsanlığın gelecekte bu tür yerlere gitmeye ihtiyacı olacak. Bu belki binlerce nesil sonrasının konusu ama insanlığın varlığını sürdürebilmesi için bunu başarması gerekiyor.

SŞ: Hocam, *Contact* (Mesaj) diye bir film vardı, belki izlemiştirsinizdir. Orada kız, babasına "Uzayda yalnız mıyız?" diye sorduğunda babası hoş bir espriyle "Eğer sadece biz varsak, bu muazzam bir yer israfı olurdu" cevabını veriyordu.

O repliği hatırlıyorum, evet. Şimdi olaya şöyle bakalım; evrende galaksiler ve yıldız sistemleri arasındaki uzaklıklar o kadar fazla ki... Işık hızıyla bile gitseniz binlerce yıl sürüyor. Bilim kurgu filmlerinde görürsünüz; bu mesafeleri aşabilmek için insanları dondurup saklarlar, bin sene sonra uyandırırılar.

Ancak rölativitede kara delikleri farklı yorumlayan yaklaşımlar da var. Kara deliklerin birer "Solucan Deliği" (Wormhole) olduğunu düşünenler mevcut. Bu konuda kimisi haklıdır, kimisi haksızdır; tam olarak oturmuş bir konu değil. Ama solucan delikleri teorik olarak gerçekten var olan matematiksel yapılardır. Teoriye göre; bir uzay gemimiz olsun ve kara deliğe doğru gidelim. Merkeze yaklaştığımızda kütleçekim kuvveti çok fazladır. Ama eğer uzay gemimizi teknolojik olarak çok ileri seviyede ve sağlam yaparsak, o tüneli aşip başka bir uzaya geçiş yapabiliriz. Bu geçiş, ya kendi evrenimizin başka bir noktasına ya da tamamen başka bir evrene olabilir.

Tabii burada şöyle bir sorun var: Planladığınız noktaya gidebilir misiniz? Bugün otobüse bindiğinizde İstanbul'a gideceğinizi biliyorsunuz. Ama böyle bir uzay gemisine binip bir solucan deliğinden geçerseniz, tünelin ucunun nereye çıkacağını bilebilir misiniz? Bu belirsiz.

SŞ: Filmde de benzer bir durum vardı. Oyuncu (Jodie Foster) bir kapsülün içinde solucan deliğinden geçiyordu. Kendisi başka bir evrene gidiyor, babasını görüyor, çok uzun bir deneyim yaşıyor ama dünyaya döndüğünde öğreniyor ki sadece 7 saniye geçmiş. Kapsül sadece 7 saniye boyunca sinyalden kaybolmuş.

Evet, bu rölativitedeki zaman genişlemesi ve uzay-zaman bükülmesiyle ilgili ilginç bir paradoks. Solucan delikleri teorik olarak bu tür yolculuklara izin verse de pratikteki sonuçları tam bir bilinmezlik.

SŞ: Evet, çok güzel gerçekten. Bu konular üzerine düşünmek, bir anlam arayışında olmak bile insanı tatmin etmeye yetiyor. Peki, sonucunu bulsak ne olacak? Belki de "yolun kendisi güzeldir" diyebilir miyiz? Mesela "Her Şeyin Teorisi"ni bulduğumuzda ne değişecek? Gerçekten mutlu mu olacağız, yoksa bu durum beraberinde yeni problemleri mi getirecek?

Bizim ömrümüz boyunca bu temel konularda çok radikal değişiklikler olmayabilir. Şu anki dönem, daha çok etrafımızdaki olayları anlama devri. Hatta bildiğimizi zannettiğimiz şeyleri bile yanlış biliyor olabiliriz. Çünkü bir iddianın birkaç kez doğrulanması, onun kesinlikle doğru olduğunu göstermez. Bunun en basit örneği Newton teorisi. Çok başarılı, her şeyi açıkladığı sanılan bir teoriydi ama yetersiz kaldığı noktalar ortaya çıktı.

Dolayısıyla şu anki durumumuz sadece fizikte değil, matematikte ve biyolojide de böyle; sürekli yeni şeyler öğreniyoruz. Biyolojide çok yeni gelişmeler var mesela. Bilkent Üniversitesi mezunu bir öğrencimiz Harvard'a doktora gitmişti, Furkan Öztürk. Orada bir yıl sonra doktora konusunu değiştirip çok temel bir soruya yöneldi: "Cansız maddeden canlılığa geçiş nasıl oldu?" Bunu açıklayacak bir model geliştirdiler ve deneysel olarak da gösterdiler.

Yani doğadaki bu olayları henüz tam bilmiyoruz ama öğreniyoruz. Benim kişisel görüşüm şu; insanlık tarihi boyunca ilerlemeler bazen yavaş seyrediyor. Ancak bir eşik aşıldıktan sonra hız birdenbire artıyor. Teknoloji geliştikçe bu hız daha da artıyor.

SŞ: Evet hocam. Bunlar birbirini besleyen süreçler. Bilim geliştikçe teknoloji ilerliyor, teknoloji ilerleyince de o bilimi etkiliyor.

Kesinlikle. Çünkü iyi bir deney yapmak için iyi bir teknoloji lazım. İyi bir teknolojiyi elde ettiğin zaman, o deneyle hem biyolojide hem fizikte hem de kimyada yeni şeyler keşfediyorsun. O teknolojik ilerleyiş

bilime transfer oluyor. Birbirini besleyen bu döngü son zamanlarda çok arttı, bayağı hızlı gidiyor. İleride çok daha farklı şeyler göreceğimize inanıyorum. Yanlış insanlar kullanmadığı sürece bilim her zaman insanlığın hayrına olur.

SŞ: Hocam, bunu yakın zamanda bir arkadaşım ile tartıştık. Oppenheimer'ın atom bombasını yapmasıyla ilgili olarak arkadaşım, "Oppenheimer bunun bomba olarak kullanılacağını bilmiyordu" diyor. Ben de bunun mümkün olmadığını, böylesi karmaşık bilimsel süreçlerin altından kalkmış ve ortaya hakikaten muazzam bir yapı koyabilmiş bir zekanın bu denli büyük bir yıkımı beraberinde getirebileceğini öngörememiş olmasına ihtimal veremediğimi söylüyorum.

Bilimsel sonucun bir bombaya dönüşebileceğini, bundan büyük bir güç elde edileceğini kafasından geçirmiş olabilir. O bir bilimin sonucu; zincirleme reaksiyon sayesinde ani bir enerji patlaması oluyor. Oppenheimer bunu biliyordu. Ancak ben Oppenheimer'ın, insanların bunu gerçekten bir silah olarak kullanacağını, o yıkımı yapacağını düşündüğünü zannetmiyorum. "İnsanlık bunu yapmaz" diye düşünmüştür. Ama işte askerlerle, politikacılarla süreç nasıl geliştirse... Şimdi dünyanın her tarafı bombalarla dolu.

SŞ: Hocam bir de bilimin kötü ellere geçmesinden bahsediyoruz ya; yapay zeka da şu an çok hızlı bir ilerleme kaydediyor. Kendi bilincini kazanmasına henüz vakit olsa da "Robotlar dünyayı ele geçirecek mi?" gibi bilim kurgu muhabbetleri yapılıyor. Aslında düşününce, insanlar onlarsız hiçbir şey yapamaz hale geldiği için bizi çoktan ele geçirdiler sayılmaz mı?

Yok, niye ele geçirsinler? Fişini çekersen, o robot durur. İleride ne olur bilemem ama şu anda öyle bir tehlike yok. Robotu elektrik süpürgesi gibi düşün; alırsın, etrafı temizletirsin, iş yaptırırsın. Bunlar faydalı şeyler. Mesela Einstein denklemlerinden bahsettik değil mi? Bizim bu denklemleri çözebilmemiz için birtakım varsayımlar yapmamız gerekir. Ancak bilgisayarlar, hiçbir varsayım olmadan doğrudan doğruya o denklemleri alarak simülasyon yapıyorlar. Bazı astrofiziksel olayları bu sayede görebiliyoruz. Yani robot veya bilgisayar, bizim için iş yapan gelişmiş bir alettir. Kapasitesini ve yazılımını iyi yönettiğin sürece senin için çalışan bir araçtır.

SŞ: Haklısınız hocam. Ben aslında spekülasyonlardan bahsediyorum. "Robotlar dünyayı ele geçirecek" diyerek bilim insanlarına çamur atan, klavye delikanlılığı yapan kesimler var ya... Ben genel olarak yapay zekayı kastettim.

O robotlar dediğimiz, çiplerle ve kodlarla, amacına uygun olarak imal edilmiş makinelerdir. "Kendi başına karar versin, hadi bir kısa yol bulsun, otonom hareket etsin" durumu şu an tam manasıyla mümkün değil. Ancak ileride çip teknolojisi gelişir, insan beynine yakın biyolojik çipler veya benzeri yapılar oluşursa... İşte o zaman o robotlar kendi başlarına karar verebilirler mi? Onu bilemem. Ama şu anda öyle bir şey yok ve teknoloji insanlığın faydasına çalışıyor.

SŞ: Kesinlikle öyle. Hocam, OpenAI şirketi ve ChatGPT örneği var biliyorsunuz. Kuruluş felsefeleri başta tamamen açık kaynak ve şeffaflık üzerineydi; bilimin gelişmesi için, insanlık yararına çalışıyorlardı. Ancak zamanla bu şeffaflık azaldı, iş ticari bir boyuta evrildi. Hatta yetkililerin şöyle bir açıklaması olmuştu: "Yapay zeka o kadar büyük verilerle besleniyor ki, artık bizim öngöremediğimiz şekilde öğrenmeyi öğreniyor." Yani sistem, kendisine kodlanmayan becerileri de kendi kendine geliştirebiliyor.

İşte bahsettiğim nokta o; bunun tam manasıyla gerçekleşmesi için çiplerin gelişmesi lazım. Şu andaki bilgisayar çiplerinin daha küçülmesi ve daha biyolojik bir hal alması, yani canlı varlığın yapısına yaklaşması gerekebilir. "Olamaz" demiyorum. Çünkü şu anda "olmaz" denen şeylerin pek çoğu bence kısa zamanda olacak.

Bundan yüz sene önceki bir fizikçiye, "Ben evimde otururken çocuklarımla telefonla görüntülü konuşuyorum" desem bana gülerdi. Ama bugün bu sıradan bir şey. Ulaşımında daha hızlı, daha rahat taşıtlar yapılabilir mi? Yapılacaktır. Biz Türkiye'de bazen farkında olamıyoruz ama bugün Amerika'daki temel bilgisayar ve teknoloji düzeyine baksan şaşırırsın. Bunu yapan da genellikle devlet değil, özel sektör. Mesela

uçan arabaların yakında kullanıma başlayacağı söyleniyor. Bundan 25 sene önce "Duvardaki ekrandan televizyon seyretililecek" dendiğinde şaşırmıştım. Ama işte seyretiliyoruz. Teknoloji çok çabuk ilerliyor ve aynı zamanda temel bilimlere de besliyor. Ülkemiz de dahil olmak üzere bu alanlara rağbet artıyor.

SŞ: Çok güzeldi gerçekten. Her şey için çok teşekkür ederim. Muazzam bir sohbetti. Çok sağ olun.

Ben teşekkür ederim. Sağ olasın.

SŞ: Son bir şey demek ister misiniz?

Çok teşekkür ederim, başarılar dilerim. Sabırlı olun, çalışın!

■ Hazırlayanlar

SELCAN ŞENYURT

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü, 3. Sınıf Öğrencisi

✉ senyurtselcan409@gmail.com



Doğruyu Ararken Yanılgılarla Karşılaşmak: Analizde Karşı Örnekler I

EYLEM ÖZTÜRK

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ eozturk@hacettepe.edu.tr



Matematik, doğası gereği doğruyu arayan bir bilimdir. Çoğu zaman “Bu ifade gerçekten doğru mu?” sorusu etrafında şekillenir. Doğru olduğunu düşündüğümüz bir önermeyi ispatlamak, matematiğin en temel hedeflerinden biridir. Ancak en az ispatlar kadar güçlü ve öğretici bir araç daha vardır: karşı örnekler.

Bu kavram, bir önermenin hükmünü tek bir durum üzerinden geçersiz kılan yapıdır. Bazen uzun süren tartışmalarla savunulan bir teoremin hatalı olduğunu, tek bir karşı örnek açıkça gösterebilir. Bu durum, matematikte kesinlik kavramının ne kadar hassas olduğunu da ortaya koyar. Karşı örnekler, yanlış genellemeleri yıkmanın, fazla geniş önermeleri daraltmanın ve yeni doğrulara ulaşmanın en etkili yollarından biridir. Weierstrass’ın hiçbir yerde türevlenemeyen fakat her yerde sürekli olan ünlü fonksiyonu, buna çarpıcı bir örnektir; yalnızca bir yanlış ortaya koymakla kalmamış, fonksiyonlar teorisinde yeni bir bakış açısı kazandırmıştır.

Bu tür örnekleri bulmak ilk başta öğrenciler için oldukça zorlayıcı olabilir. Bir önermenin yanlış olduğunu tek bir karşı örnekle gösterebileceklerini duyduklarında, bazı öğrenciler doğru bir önermeyi de tek bir örnekle “ispatlayabileceklerini” düşünürler. Her ne kadar yalnızca örnekler vererek bir teoremin ispatlanamayacağını bilseler de, bazı öğrencilerin tek bir karşı örneğin bir önermeyi geçersiz kıldığını kabullenmeleri kolay değildir. Bazı öğrenciler ise karşı örneği yalnızca “istisnai” bir durum olarak görür ve bunun daha genel bir yapıyı temsil edebileceğini fark edemezler. Selden & Selden (1998)([6]) bu durumu şöyle ifade etmiştir:

Öğrenciler çoğu zaman tek bir karşı örneğin bir varsayımı çürüttüğünü göremez. Bu durum, karşı örneğin “var olan tek örnek” olarak algılanmasıyla meydana gelebilir; halbuki karşı örnek, daha genel bir durumu temsil eder.

Zamanla öğrenciler, karşı örneklerin önemini kavrar ve onları üretme sürecine ilgi duymaya başlarlar. Yanlış önermeleri çürütmek için karşı örneklerden yararlanmak, doğru ifadeleri sınamak açısından son derece etkili bir yöntemdir. Örneğin:

- Mevcut ifadeyi doğru hale getirmek için hangi değişiklikler yapılabilir?
- Bir karşı örneği değiştirip hala karşı örnek olarak kalmasını sağlayabilir misiniz?
- Karşı örneğinizin çürüttüğü başka önermeler düşünebilir misiniz?

Karşı örneklerin aranması matematik tarihinde önemli bir yer tutar. Bu duruma ilişkin üç ünlü örnekten bahsedeceğim.

İlk örnek, asal sayılarla ilgili tarihsel bir yanılgıya dayanır. Uzun yıllar boyunca matematikçiler yalnızca asal sayılar üretecek bir formül bulmaya çalıştılar. Bir dönem,

$$2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklindeki sayıların her zaman asal olduğuna inanılıyordu. Ancak Euler bu inancı çürüten bir karşı örnek buldu. $n = 5$ için bu sayının asal olmadığını gösterdi:

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Bu biçimdeki asal sayılara Fermat asalları denir ve hangi düzgün n -genlerin çizilebilir olduğunu belirlemede önemli bir rol oynarlar. (Bkz. örneğin, Aaboe (1975) s. 84, [1]).

Asal sayılarla ilgili bir başka varsayım ise hala ispatlanmayı ya da çürütülmeyi beklemektedir. Goldbach-Euler varsayımı, Christian Goldbach tarafından 1742’de Euler’e yazdığı bir mektupta ortaya atılmıştır ve aldatıcı derecede basit görünür: 2’den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamıdır. Örneğin, $12 = 5 + 7$, $20 = 3 + 17$ ve benzeri.

Güçlü bilgisayarlar, olası karşı örnekleri bulmak için kullanılmış ve $4, 6, \dots, 4 \times 10^{14}$ arasındaki sayılar içinde hiçbir karşı örnek bulunamamıştır (bkz. Richstein, 2000, [5]). 2000 yılında *Faber & Faber* adlı kitap yayınevi, bu varsayımı iki yıl içinde ispatlayacak ya da çürütecek kişiye 1 milyon dolarlık bir ödül vadetmiştir. Ancak ödül hala sahipsizdir.

19. yüzyılda büyük Alman matematikçi **Karl Weierstrass**, şu ifadeye karşı ünlü karşı örneklerini oluşturmuştur: “Eğer bir fonksiyon (a, b) aralığında sürekli ise, bu aralıkta bazı noktalarda türevlenebilir.”

Bu tür fonksiyonlara daha sonraki bölümde ayrıntılı olarak değineceğiz. Weierstrass, bu karşı örneklerini ilk olarak 1861 yılında verdiği derslerde göstermiş, ardından 1872’de bir makalede yayımlamıştır.

Onun örneği, matematikte sezgilerin ne kadar yanıltıcı olabileceğini açık biçimde ortaya koymuştur. Uzun süre “sürekli fonksiyonlar en azından bazı noktalarda türevlenebilir” düşüncesi doğru kabul edilmişti; oysa Weierstrass’ın örneği, her noktada sürekli ama hiçbir noktada türevlenemeyen bir fonksiyonun gerçekten var olabileceğini kanıtlamıştır. Weierstrass’ın ünlü örneği gibi büyük keşiflerin ışığında, daha temel düzeyde bir teoremin ispatını engelleyen kritik koşulları anlamamızı sağlayan Analiz’den birkaç çarpıcı karşı örneği ele alacağız.

■ Analiz’de Karşı Örnekler

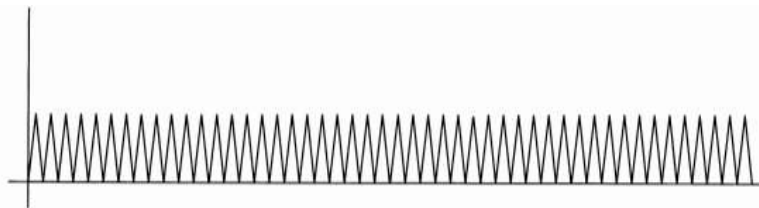
Örnek 1. Eğer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ise, en az bir noktada türevlenebilir.

Karşı Örnek. İlk olarak, Weierstrass tarafından ortaya konulan fonksiyonu inşa edeceğiz. Bunun için önce testere dişi fonksiyonu olarak bilinen $\sigma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım: k, m ve n harfleri tam sayıları göstermektedir:

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} x - 2n, & \text{eğer } 2n \leq x < 2n + 1, \\ 2n + 2 - x, & \text{eğer } 2n + 1 \leq x < 2n + 2, \end{cases}$$

σ_0 fonksiyonu 2-periyotludur, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $\sigma_0(x + 2m) = \sigma_0(x)$ eşitliği sağlanır. Şimdi de sıkıştırılmış testere dişi fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\sigma_k(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \sigma_0(4^k x).$$



Şekil 1. Testere dişi fonksiyonunun grafiği.

Bu fonksiyonun periyodu $T_k = \frac{2}{4^k}$ 'dir, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $\sigma_k(x + mT_k) = \sigma_k(x)$ eşitliği sağlanır. M -testine göre $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x)$ serisi bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır, ve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x)$$

fonksiyonu süreklidir. f fonksiyonunun hiçbir noktada türevlenebilir olmadığını iddia ediyoruz. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ alalım ve $\delta_n = \frac{1}{2 \cdot 4^n}$ olsun. $\delta_n \rightarrow 0$ iken aşağıdaki fonksiyonun limitinin olmadığını göstereceğiz:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x \pm \delta_n) - f(x)}{\delta_n} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x \pm \delta_n) - \sigma_k(x)}{\delta_n}$$

Yukarıdaki seri içinde $k > n$, $k = n$, $k < n$ olmak üzere üç tür terim vardır. Eğer $k > n$ ise δ_n sayısı σ_k fonksiyonunun periyodunun bir tamsayı katı olacaktır:

$$\delta_n = \frac{1}{2 \cdot 4^n} = 4^{k-(n+1)} \cdot \frac{2}{4^k} = 4^{k-(n+1)} \cdot T_k,$$

dolayısıyla $\sigma_k(x \pm \delta_n) - \sigma_k(x) = 0$ elde edilir. Böylece $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ serisi $n + 1$ terimin toplamına indirgenir:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sigma_n(x \pm \delta_n) - \sigma_n(x)}{\delta_n} + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(x \pm \delta_n) - \sigma_k(x)}{\delta_n} \quad (1)$$

$\sigma_0(x)$ fonksiyonunu kullanarak $\sigma_k(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\sigma_k(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^k (4^k x - 2n), & \text{eğer } \frac{n}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} + \frac{1}{4^k}, \\ \left(\frac{3}{4}\right)^k (2n + 2 - 4^k x), & \text{eğer } \frac{n}{2^{k-1}} + \frac{1}{4^k} \leq x < \frac{n+1}{2^{k-1}}. \end{cases}$$

Buradan açıktır ki $k = n$ olduğunda elde edilen σ_n fonksiyonunun $[x - \frac{1}{2 \cdot 4^n}, x]$ aralığında eğimi 3^n ve $[x, x + \frac{1}{2 \cdot 4^n}]$ aralığında eğimi -3^n olacaktır. Bu durumda (1) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim için aşağıdakiler elde edilir:

$$\left| \frac{\sigma_n(x \pm \delta_n) - \sigma_n(x)}{\delta_n} \right| = 3^n \quad (2)$$

Diğer taraftan $k < n$ olduğunda

$$\left| \frac{\sigma_k(x \pm \delta_n) - \sigma_k(x)}{\delta_n} \right| \leq 3^k \quad (3)$$

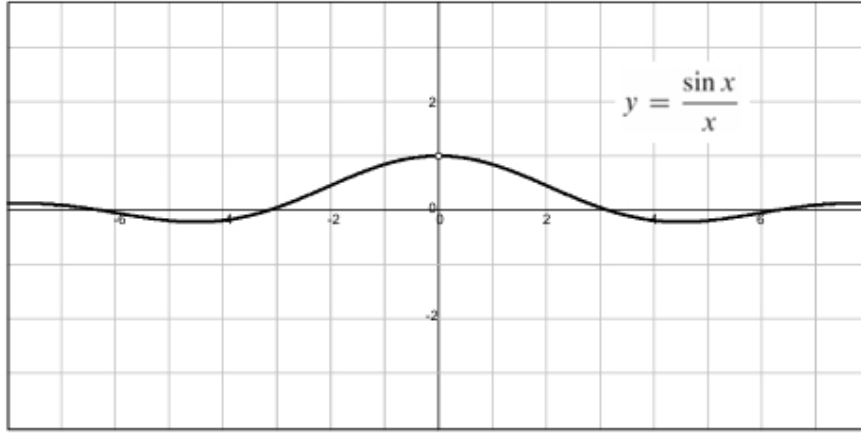
olduğu açıktır. (2) ve (3) değerlendirmelerini (1) eşitliğinde gözönüne alırsak:

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| \geq 3^n - (3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 1) = 3^n - \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

elde edilir. Buradan $\delta_n \rightarrow 0$ iken $\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| \rightarrow \infty$ olduğunu görürüz, bu da f fonksiyonunun hiçbir noktada türevlenebilir olmadığını söyler.

Örnek 2. Eğer $g(a) = 0$ ise, $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonu $x = a$ noktasında dikey asimptota sahiptir.

Karşı Örnek. $y = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında dikey asimptota sahip değildir.



Örnek 3. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de $x = a$ noktasında süreksiz ise, o halde $f(x)g(x)$ fonksiyonu da $x = a$ noktasında süreksizdir.

Karşı Örnek.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \neq g(0) = \frac{1}{2}.$$

Dolayısıyla hem f hem de g fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksizdir.

Buna karşılık çarpımları:

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

için

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1 = (f \cdot g)(0)$$

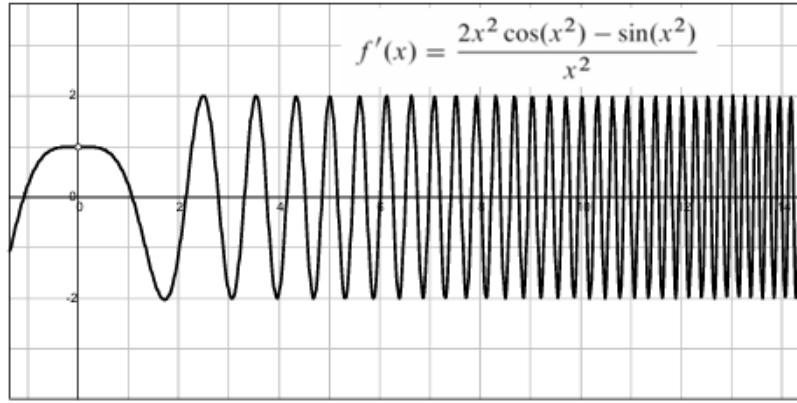
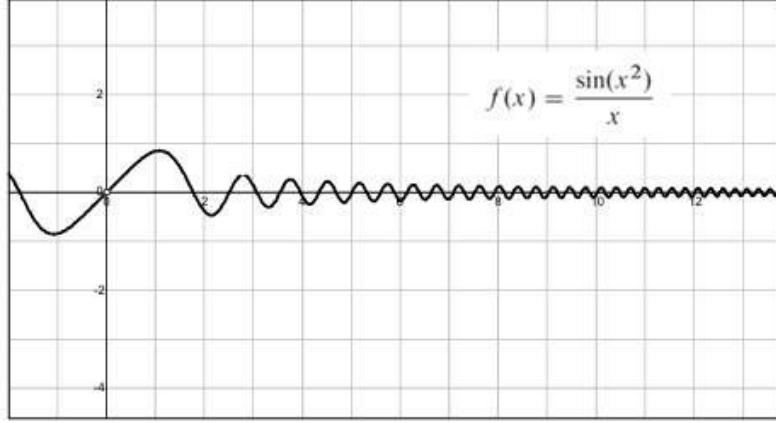
olduğundan, $f \cdot g$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında *süreklidir*.

Örnek 4. $g(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında türevlenebilir değildir, ve $f(x)$ fonksiyonu da $x = g(a)$ noktasında türevlenebilir değildir. Bu durumda $F(x) = f(g(x))$ fonksiyonu da $x = f(g(a))$ noktasında türevlenebilir değildir.

Karşı Örnek. $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevlenebilir değildir. $f(x) = 2x + |x|$ fonksiyonu da $x = g(0)$ noktasında türevlenebilir değildir. Buna karşın $F(x) = f(g(x)) = x$ fonksiyonu $x = f(g(0)) = 0$ noktasında türevlenebilirdir.

Örnek 5. $f(x)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında türevlenebilir ve $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ vardır. Bu durumda $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ vardır.

Karşı Örnek. $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında türevlenebilirdir ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x}$ vardır. Ancak $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2}$ yoktur.



Örnek 6. Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi $x = a$ noktasında pozitifse, o zaman $x = a$ etrafında bir komşulukta fonksiyon artandır.

Karşı Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

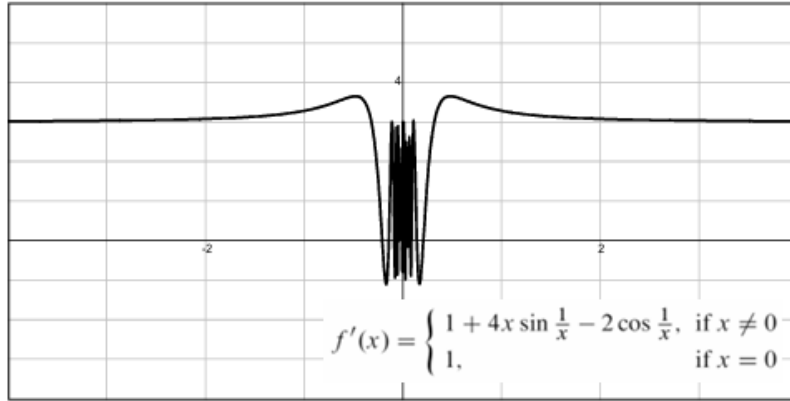
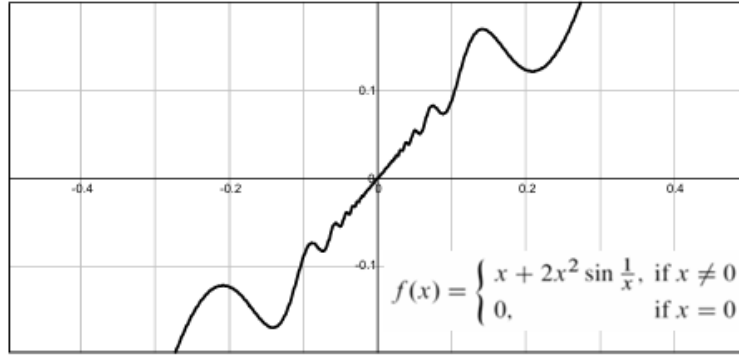
şeklinde tanımlansın.

Bu fonksiyonun türevi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

Burada $f'(0) = 1 > 0$ olduğundan türev $x = 0$ noktasında pozitifdir. Ancak, türev $x = 0$ civarındaki her komşulukta hem pozitif hem de negatif değerler almaktadır. Bu da, $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktası çevresinde hiçbir komşulukta monoton olmadığını göstermektedir.



Örnek 7. Eğer $f(x)$ fonksiyonu her $x \in [a, b]$ için tanımlı ve

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

varsa, o zaman

$$\int_a^b f(x) dx$$

da vardır.

Karşı Örnek: Dirichlet fonksiyonunu kullanalım:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise,} \\ -1, & x \text{ irrasyonel ise.} \end{cases}$$

Burada

$$|f(x)| = 1$$

olduğundan

$$\int_a^b |f(x)| dx = b - a.$$

Fakat

$$\int_a^b f(x) dx$$

mevcut değildir.

Bunu belirli integralin tanımını kullanarak gösterelim. $[a, b]$ kapalı aralığını alalım. Bu aralığı n alt aralığa

bölelim ve Riemann toplamlarının limitine bakalım:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i.$$

Burada her alt aralıktan seçilen c_i noktası rasyonel veya irrasyonel olabilir. Eğer tüm c_i 'ler rasyonel seçilirse, toplam

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_i = b - a$$

elde edilir. Eğer tüm c_i 'ler irrasyonel seçilirse, toplam

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (-1) \cdot \Delta x_i = -(b - a)$$

elde edilir. Rasyonel ve irrasyonel seçimler karıştırılırsa, toplam bu iki değerin arasında herhangi bir değer alabilir.

Dolayısıyla limit tek bir değere yaklaşmaz ve

$$\int_a^b f(x) dx$$

Riemann anlamında **mevcut değildir**.

Örnek 8. Eğer her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $b_n \leq a_n$ ve $\sum a_n$ yakınsak ise, o halde $\sum b_n$ serisi de yakınsaktır.

Karşı Örnek. $a_n = 0$, $b_n = -\frac{1}{n}$ için, her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $b_n \leq a_n$ ve $\sum a_n$ yakınsaktır, ancak $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ıraksaktır.

Örnek 9. Eğer her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $|b_n| \leq |a_n|$ ve $\sum a_n$ yakınsak ise, o halde $\sum b_n$ serisi de yakınsaktır.

Karşı Örnek. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ve $b_n = \frac{1}{n}$ alalım. Burada her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $|b_n| \leq |a_n|$ sağlanır ve $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ serisi (alterne harmonik seri) yakınsaktır. Ancak harmonik seri $\sum \frac{1}{n}$ ıraksaktır.

Örnek 10. $\int_a^\infty f(x) dx$ has olmayan integral yakınsak ise, $\int_a^\infty |f(x)| dx$ has olmayan inegral de yakınsaktır.

Karşı Örnek.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

integrali yakınsaktır, ancak

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

integrali ıraksaktır.

$$F(a) = \int_1^a \sin x dx.$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $F(a)$ fonksiyonu sınırlıdır ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Dirichlet kriterine göre

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

integrali yakınsaktır.

Diğer yandan,

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$$

Burada $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx$ integrali yakınsakken, $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx$ integrali ıraksaktır. Buradan $\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx$ integralinin ıraksaklığı, dolayısıyla da $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ integralinin ıraksaklığı elde edilir.

Bu yazıda, Analiz alanından seçilmiş dikkat çekici karşı örnekler aracılığıyla matematikte ispatın sınırlarını ve sezgilerin nasıl yanıltıcı olabileceğini inceledik.

Sonraki sayılarda, aynı yaklaşımı Cebir, Topoloji ve diğer temel matematik alanlarına da genişleterek, farklı konularda karşı örneklerin nasıl ortaya çıktığını ve düşünme biçimimizi nasıl zenginleştirdiğini göstermeye devam edeceğiz.

■ Kaynaklar

- [1] A. Aaboe, (1975) Episodes From the Early History of Mathematics. Wash ington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- [2] C. Boyer, (1991) A History of Mathematics. 2nd edition. Wiley.
- [3] C.C. Pugh, Real Mathematical Analysis. 2nd edition, Springer.
- [4] S. Klymchuk, (2004) Counter-Examples in Calculus. Maths Press, New Zealand.
- [5] J. Richstein, (2000) Verifying the Goldbach conjecture up to 4×10^{14} . Mathematics of Computation.70 (236), 1745–1749.
- [6] A. Selden, J.Selden, (1998) The role of examples in learning mathematics.

Bir Sanat Olarak Matematik: Shakespeare Denklemleri

BERKAY ATLI

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü 4. Sınıf Öğrencisi

✉ berkeipersonlich@gmail.com



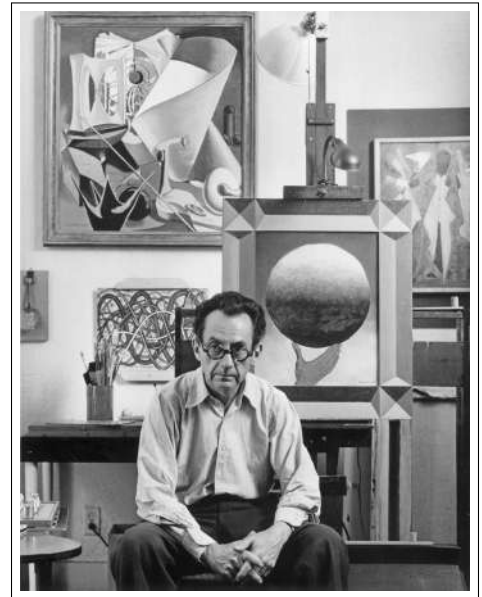
Sanat denilince belki de birçoğumuzun aklına Rönesans dönemi sanatçıları ve eserleri gelir. Bu dönemin örneklerinde Michelangelo'nun *Davut Heykeli*'nden Leonardo da Vinci'nin *Mona Lisa*'sına, Raphael'in *Atina Okulu*'ndan Botticelli'nin *Venüs'ün Doğuşu*'na uzanan bir serüven bizleri karşılar. Ancak bu klasik anlayışın tam karşısında, Rönesans'ın idealize edilmiş ve net hatlara sahip dünyasını terk eden Claude Monet durur. Monet, izleyiciyi doğanın sürekli değişen ışık oyunları ve geçici anlarıyla baş başa bırakmıştır. Özellikle sanatçının *The Water Lily Pond* eseri, bu radikal değişimin bir simgesi olarak, durağan formların yerini ışığın ve rengin dans ettiği canlı bir doğaya bırakışını gözler önüne sermektedir. Sanatın görünenin ötesine geçme arzusu ise bizi Man Ray'in *Shakespeare Denklemleri*'ne götürür. Monet nasıl ışığı yakalamaya çalıştıysa, Man Ray de karmaşık matematiksel modelleri sanatsal objelere dönüştürerek, bilimin katı kuralları ile sanatın sürrealist ruhunu şaşırtıcı bir denklemde birleştirmiştir. Bu yazıda rotamızı doğanın ışığından zihnin geometrisine çevireceğiz ve Man Ray'in, matematiğin soğuk formüllerini sanata dönüştürdüğü Shakespeare Denklemleri serisini mercek altına alacağız.

■ Man Ray Kimdir?

1890 yılında Philadelphia'da Rus göçmeni bir ailenin çocuğu olarak, Emmanuel Radnitzky adıyla dünyaya gelen sanatçı, sanat tarihine kazınan ismiyle Man Ray kimliğini adeta bir zırh gibi kuşanmıştır. Ancak onun asıl sanatsal doğuşu, 1921 yılında sanatın kalbinin attığı Paris'e taşınması ve Montparnasse'nin bohem dünyasına adım atmasıyla gerçekleşir.

Burada Marcel Duchamp ile kurduğu derin dostluk ve Dadaizm'in yıkıcı estetiği, onu geleneksel sanatın tüm kurallarını reddetmeye itmiştir. O ne tam bir ressam ne de tam bir fotoğrafçıdır; eline geçen her türlü nesneyi ve tekniği kullanarak gerçekliği manipüle eden bir "fikir işçisidir". Kendisini bir "arıza" olarak gören Man Ray için sanat, estetik bir hazdan ziyade zihinsel bir kışkırtmadır.

Sanatçının en belirgin özelliği, araçlar ve teknikler arasındaki hiyerarşiyi tamamen yok etmesidir. Monet ve çağdaşları gözün gördüğü ışığı yakalamaya çalışırken, Man Ray karanlık odada kamerasız fotoğraflar (rayogramlar) üreterek ya da bir ütüye çiviler yapııştırarak nesnelerin işlevini ve anlamını tersyüz etmiştir. "Fotoğraflayamadığım şeyleri resmediyorum, resmedemediklerimi ise fotoğraflıyorum" diyerek, sanatın ilham kaynağının dış dünyadan değil, sanatçının kendi rüyalarından ve bilinçaltından gelmesi gerektiğini savunmuştur. Onun eserlerinde



Man Ray (1890-1976)

kadın bedeni bir kemana dönüşebilir veya bir metronomun tiktaklarına bir göz eşlik edebilir; çünkü Man Ray’ın dünyasında mantık, yerini şiirsel bir absürtlüğe bırakır.

İşte bu sınır tanımaz entelektüel merak, onu 1930’larda sanat çevrelerinin hiç beklemediği bir yere, Paris’teki Henri Poincaré Enstitüsü’nün tozlu odalarına sürükler. Bu kez ilhamı, doğanın romantik manzaraları veya insan anatomisi yerine, insan zihninin en soyut ve en kesin ürününde; matematikte aramaya başlar. Birazdan detaylarına ineceğimiz, formüllerin soğuk dünyasını Shakespeare’in dramatik evreniyle buluşturduğu o meşhur serüven, sanatçının bilimsel güzelliği keşfettiği bu noktada şekillenir.

■ Man Ray’ın Matematikle Olan Diyaloğu

Bu ismin arkasında, savaşın gölgesinden Hollywood’un ışıltısına uzanan zorunlu bir göç hikayesi ve Man Ray’ın zihnindeki müthiş bir sentez yatar. Hikâye, 1934 yılında Max Ernst’in önerisiyle başlar. Man Ray, Paris’teki Henri Poincaré Enstitüsü’ne adım attığında, kendini “tozla örtülmüş, ahşap, alçı ve telden yapılmış yüzlerce garip nesneyle dolu loş bir salonda” bulur. Bu matematiksel modeller, 19. yüzyılın sonlarında öğrencilere soyut formülleri anlatmak için üretilmiş olsa da, Man Ray onlara bir matematikçi gibi değil, bir sürrealist gibi bakar. O, formülleri değil formların gizli estetiğini görür.

Ancak bu nesnelerin Shakespeare Denklemleri’ne dönüşmesi için tarihin devreye girmesi gerekecektir. 1940’ta Hitler’in orduları Paris’e yaklaştığında şehri terk etmek zorunda kalan sanatçı, çalışmalarını geride bırakarak Hollywood’a yerleşir. 1948 yılında, Paris yıllarından kalan o model fotoğraflarını nihayet geri aldığı anda, onları sadece birer fotoğraf olarak bırakmaz; bu siyah-beyaz kareleri renkli ve canlı yağlı boya tablolarla dönüştürmeye başlar.

Man Ray, modellerin kıvrımlarında, sivri uçlarında ve boşluklarında insani (antropomorfik) özellikler görür. Bu yüzden seriye başlangıçta **Human Equations (İnsani Denklemler)** adını verir. Fakat eserler Beverly Hills’teki Copley Gallery’de sergileneceği sırada, Man Ray daha cüretkâr bir adım daha atar. Matematik’in evrensel *doğruluğu* ile Shakespeare’in evrensel *dramını* birleştirmeye karar verir.

Ona göre, karmaşık bir geometrik yüzeyin yarattığı görsel gerilim, Shakespeare’in tragedyalarındaki duygusal gerilimle örtüşmektedir. Örneğin, matematikçilerin *Kummer Yüzeyi* olarak bildiği karmaşık ve dikenli bir formu *King Lear* (Kral Lear) olarak adlandırır. Bu sivri yapılar artık sadece bir fonksiyonun grafiği değil, Kral Lear’ın acı çeken ruh halinin ve kızlarıyla yaşadığı çatışmanın görsel bir karşılığıdır. Bir başka modeli *Hamlet*, diğerini *Macbeth* olarak isimlendirerek serinin adını **Shakespearean Equations (Shakespeare Denklemleri)** olarak değiştirir.

Böylece Man Ray; bilimin soğuk, kesin ve duygusuz dili olan matematik ile insan doğasının en tutkulu, kaotik ve duygusal dili olan Shakespeare tiyatrosunu aynı tuvalde buluşturur. Bu isim değişikliği basit bir adlandırma değil, sürrealizmin en büyük hedeflerinden biri olan *zıtlıkların birliği* düşüncesinin bir kanıtıdır.

■ Shakespeare Denklemleri

Tarihsel süreci bir kenara bırakıp doğrudan eserlerin kendisine, yani tuvallerdeki *görsel ispatlara* odaklanalım. Man Ray, bu seride rastgele bir isimlendirme yapmamış; aksine matematiksel yüzeylerin topolojik karakteri ile Shakespeare oyunlarının dramatik örgüsü arasında şaşırtıcı bir izomorfizma (eş yapı) kurmuştur. Sanatçı, denklemlerin çözüm kümesindeki geometrik davranışları —keskinlik, süreklilik, iç içe geçme veya kopuşları— oyunlardaki duygusal gerilimlerle eşleştirmiştir.

İşte matematik’in soyut formlarının, Shakespeare’in etten kemikten karakterlerine dönüştüğü o çarpıcı örnekler:



Kral Lear (King Lear): Man Ray bu eserde, ünlü Kummer yüzeyinin karmaşık yapısal katmanlarını, Shakespeare'in Kral Lear oyunundaki karakter hiyerarşisiyle ilişkilendirir. Modelin üst kısmındaki genişleyen yüzeyi Lear'ın kendisi (ve belki de tacı/otoritesi) olarak yorumlarken, alt tabakaları onun trajik kaderini paylaşan kızları ve krallığın çöküşü olarak betimlemiştir. Matematiksel bir yüzeydeki delikler ve bükülmeler ise, trajedinin yarattığı yıpranmışlık ve çözülmenin görsel bir metaforuna dönüşür.

Windsor'un Şen Kadınları (The Merry Wives of Windsor):

Bu tablo, eliptik fonksiyonlar teorisinin temel taşlarından biri olan Weierstrass fonksiyonunun türevinin kutuplarını temel alır. Ancak Man Ray'in bakış açısıyla bu kutuplar ve dalgalanmalar, Windsor'un Şen Kadınları'na dönüşmüştür. Sanatçı, matematiksel yapının içsel ritmini ve karmaşayı kullanarak, oyunun neşeli, hareketli ve kurnaz yapısını yansıtmış; böylece soğuk bir grafikten insani ve mizahi bir dokunuş çıkarmayı başarmıştır.



Julius Caesar: Serinin belki de matematiksel olarak en ilginç metaforlarından biridir. Man Ray'in *Julius Caesar* yorumu, $w = e^{(1/z)}$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasında temel tekilliğini esas alır. Karmaşık analizde bir fonksiyonun davranışının en öngörülemez olduğu bu *tekillik* noktası, sanatçının gözünde bir imparatorun trajik sonunu ve ihaneti simgeleyen güçlü bir metafora dönüşmüştür. Fonksiyonun tekillik çevresinde adeta patlayan yapısı ile Sezar'ın düşüşü arasındaki analogi büyüleyicidir.

On İkinci Gece (Twelfth Night): Farklı matematiksel modelleri (özellikle eliptik integrallere ait yüzeyleri) bir araya getiren bu eser, yüzeyler ve eğriler arasındaki etkileşimi vurgular. Tablodaki spiral şekiller ve birbiriyle kesişen geometrik yapılar, Shakespeare'in *On İkinci Gece* oyunundaki kılık değiştirmeleri, kimlik karmaşalarını ve yanlış anlaşılmalara üzerine kurulu mizahi örgüyü yansıtır. Geometrik formların iç içe geçmesi ise, oyunun olay örgüsündeki düğümleri görselleştirir.





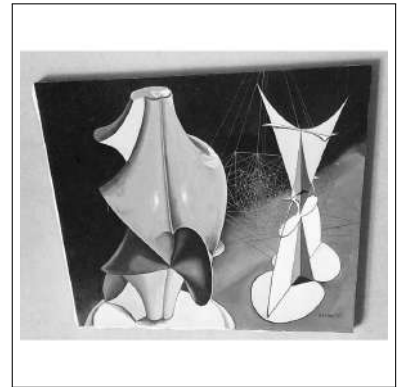
Macbeth: Bu eser, keskin hatlara ve agresif bir geometrik yapıya sahip bir modeli temel alır. Man Ray, modelin yüzeyindeki sert köşeleri ve bıçak gibi kesilen formları, Macbeth'in dizginlenemez hırsı ve bu hırsın getirdiği şiddetle özdeşleştirmiştir. Matematiksel sürekliliğin yerini burada keskin kırılmalar alır; tıpkı Macbeth'in ahlaki çöküşü ve “uykuyu öldüren” vicdan azabı gibi, bu form da izleyicide tekinsiz bir his uyandırır.

Hamlet: Man Ray, bu tablo için, kendi içine kapanan, kıvrımlı ve kapalı bir topolojik yüzeyi seçmiştir. Sanatçı bir röportajında, bu formun beyaz ve çıkıntılı yapısının kendisine *Yorick'in kafatasını* (oyunun meşhur mezarlık sahnesini) çağrıştırdığını belirtmiştir. Modelin karmaşık ve döngüsel yapısı, Hamlet'in eylemsizliğini, zihnindeki bitmek bilmeyen “olmak ya da olmamak” döngüsünü ve melankolisini simgeleyen mükemmel bir geometrik metafordur.



Othello: Serinin en ağır ve karanlık formlarından biridir. Man Ray, bu eserde oldukça yoğun, kütsel bir matematiksel objeyi (genellikle bir elipsoit veya kapalı yüzey varyasyonu) kullanmış ve onu koyu, gölgeli tonlarla resmetmiştir. Bu görsel ağırlık, Othello'nun ruhunu ele geçiren kıskançlığın (o “yeşil gözlü canavarın”) boğucu etkisini temsil eder. Matematiksel hacmin büyüklüğü, karakterin trajik hatasının büyüklüğüyle örtüşür.

Antony ve Kleopatra: Diğer eserlerden farklı olarak bu kompozisyon, tek ve bütünleşik bir yapı yerine, birbiriyle etkileşim halindeki iki ayrı geometrik formu (genellikle kesişen silindirlere veya jeodezik eğriler) içerir. Man Ray, bu iki formu, tarihin ve tiyatrunun en ünlü aşıkları olan Antony ve Kleopatra olarak kurgulamıştır. Matematiksel olarak birbirine teğet geçen veya kesişen bu yapılar, karakterlerin politik ve duygusal olarak birbirinden kopamayışını, kaderlerinin birbirine düğümlenmiş halini sembolize eder.



Sonuç olarak, Man Ray'ın Shakespeare Denklemleri serisi, bizlere matematiğin yalnızca kâğıt üzerindeki soğuk sembollerden ibaret soyut bir evren olmadığını hatırlatır. O, Henri Poincaré Enstitüsü'nün tozlu raflarında unutulmuş cebirsel yüzeylere baktığında, bir matematikçinin gördüğü fonksiyonu değil, o fonksiyonun ardındaki şiirsel potansiyeli görmüştür.

Bir Kummer yüzeyinde Kral Lear’ın trajedisini ya da bir eliptik fonksiyonda Othello’nun kıskançlığını bulabilmek; bilimin evrensel doğruları ile sanatın öznel duygularının aslında aynı hakikatin iki farklı yüzü olduğunu kanıtlar. Bu eserler bizler için üzerinde çalıştığımız formüllerin katı kesinliğinin ötesinde, keşfedilmeyi bekleyen estetik bir ruh taşıdığının en zarif ispatıdır. Belki de artık karmaşık bir denkleme bakarken, sadece çözüm kümesini değil, gizli kalmış bir sanat eserini de görmeye çalışmalıyız.

■ Kaynaklar

- [1] E. A. Robinson Jr., Man Ray’s Human Equations, Notices of the American Mathematical Society, vol. 62, no. 10, 2015.
- [2] A. K. Marquardt, The mathematician, the Surrealist, and the poet are of imagination all compact: Man Ray’s Shakespearean Equations, Interfaces, vol. 42, pp. 99-128, 2019.
- [3] Man Ray: Biography, Works and Quotes, <https://www.manray.net/>. [Erişim Tarihi: 16 Aralık 2025].
- [4] Man Ray: Human Equations, The Phillips Collection. <https://www.phillipscollection.org/event/2015-02-06-man-ray-human-equations>. [Erişim Tarihi: 16 Aralık 2025]

Markov–Monte Carlo Stokastikliği ve Deterministik Model: Aynı Dinamiğin İki Yüzü

DERYA ALTINTAN

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ deryaaltintan@hacettepe.edu.tr



Doğadaki birçok süreç oldukça kalabalıktır. Örneğin, bir popülasyonda pek çok farklı tür bulunur ve popülasyonun dinamiklerini, bu türlerin birbirleriyle olan ilişkileri belirler; canlı organizmaların davranışları, sayısız molekülün birbirleriyle etkileşime girmesiyle şekillenir; bir mühendislik probleminde, birbirlerine bağlı çalışma modları ve olası arıza durumları vardır; bir biyokimyasal reaksiyon ağında, birçok farklı tür, birbirleriyle etkileşime girerek yeni türler oluşturur. Dolayısıyla hem hayatta hem de laboratuvar ortamı oldukça kalabalıktır. Türler, sınıflar ve durumlar üçlü beşli dizilir ve sistemlerin dinamiklerini bunların arasındaki ilişkiler belirler.

Biz çalışmamızda tüm bu sistemleri, A, B ile temsil edilen iki farklı türden oluşan bir sistem üzerinden inceleyeceğiz. Burada, A, B bir biyokimyasal süreç için iki farklı tür, bir popülasyon dinamiği için av–avcı gibi iki canlı organizma ya da bir mühendislik problemi için girdiler ve çıktılar olarak düşünülebilir. Söz konusu sistem, üzerine çalışılan süreçlerin özünü sadeleştirerek “bir halden diğerine geçiş” fikrini çok net ortaya koyan bir prototip olarak düşünülebilir.

Şimdi, G_1, G_2 ile gösterilen iki farklı geçişten oluşan bir sistemi düşünelim:

$$G_1 : A \xrightarrow{k_1} B, G_2 : B \xrightarrow{k_2} A. \quad (1)$$

Bu sistemi matematiksel olarak modellemenin iki farklı yolu vardır: (i)*deterministik modelleme* (ii)*stokastik modelleme*. Çok basit bir şekilde anlatmak gerekirse deterministik modelleme sürprizleri hiç sevmezken, stokastik modelleme tüm sürprizlere açıktır. Örneğin, konumu x ile gösterilen bir aracın t zamanına bağlı olarak yer değiştirme sürecini modelleyelim. Eğer, araç trafiksiz bir yolda sabit hızla gidiyorsa x deterministik olarak modellenenebilir. Bu, şu demektir, aracın ne zaman nerede olacağı her zaman bellidir. Dolayısıyla, süreç $x = f(t)$ şeklinde belirlenir. İstenilen bir t zamanında aracın konumu olan x , $f(t)$ fonksiyonuna ilgili t yerleştirilerek doğrudan elde edilebilir. Ama eğer araç yoğun bir trafikte sabit olmayan bir hızla gidiyorsa, aracın önüne çıkan bir engel, hızlanan veya yavaşlayan araç akışı gibi faktörler aracın gideceği yere ulaşma zamanını belirsiz hale getirecektir. Dolayısıyla, aracın bir t anındaki konumu hem zamana, hem de zamana bağlı rastgele süreçleri gösteren $\mathbb{P}(t)$ 'ye bağlıdır. Dolayısıyla, süreç $x = g(t, \mathbb{P}(t))$ şeklinde stokastik olarak modellenmelidir. Burada, $\mathbb{P}(t)$ tüm rastgele değişimleri modelleyen olasılık fonksiyonudur.

Şimdi, eq. (1) ile belirlenen kendi orijinal sistemimize geçebiliriz. Burada k_1 ve k_2 , A, B türlerinin birbirlerine dönüşümünü etkileyen tüm süreçler dikkate alınarak belirlenen pozitif sabitlerdir.

Bu sistemi deterministik olarak modellediğimizde, sistem dinamiklerini *kuralları belli ve öngörülebilir* kabul eder ve modeli G_1 ve G_2 geçişlerinin yönettiği bir yapı olarak ele alırız. G_1, A türünü girdi olarak alır; A 'nın miktarını $k_1 A$ oranında azaltırken, B 'yi aynı oranda artırır. Benzer olarak, G_2, B türünü girdi olarak kabul eder; B 'yi $k_2 B$ oranında azaltırken, A 'yı bu oranda artırır. Dolayısıyla, A ve B 'nin miktarlarının zaman içerisindeki değişimi

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A + k_2 B, \quad \frac{dB}{dt} = k_1 A - k_2 B, \quad (2)$$

şeklide verilen *adi diferansiyel denklem (ADD)* sistemi ile modellenir [7].

Deterministik modelleme, sistemin tamamen öngörülebilir olduğu varsayımıyla çalışır; oysa gerçek dünya çoğu zaman bu kadar pürüzsüz değildir. Molekül çarpışmaları, düzensiz trafik akışları veya beklenmedik çevresel etkiler, ele alınan sürecin dinamiklerinde anlık ve tahmin edilemeyen değişikliklere yol açabilir. Bu nedenle, incelenilen süreci sürekli ve düzgün bir akış olarak temsil eden deterministik modelleme çoğu durumda yetersiz kalır ve stokastik modelleme devreye girer. Stokastik modelleme de sistemin anlık durumu zamana bağlı bir *konum vektörü* ile gösterilir ve her bir geçişi tanımlayan iki temel yapı kullanılır. Bunlar *eğilim fonksiyonu* ve *net değişim vektörüdür*. Eğilim fonksiyonu, bir geçişin hangi sıklıkla gerçekleşmek istediğini gösterirken; net değişim vektörü, geçiş gerçekleştiğinde sistemin konum vektöründe meydana gelecek değişimin yönünü ve büyüklüğünü gösterir.

Bu kavramları eq. (1)’de verilen kendi sistemimiz üzerinden somutlaştıralım. Konum vektörümüzü

$$X(t) = (A(t), B(t))^T, X(t) \in \mathcal{X}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $A(t), B(t)$ sırasıyla A, B türlerinin $t > 0$ anındaki miktarlarını, $\mathcal{X}$ ise sistemin konum uzayını göstermektedir. Aşağıdaki tabloda, G_1 ve G_2 geçişleri, bu geçişlere karşılık gelen eğilim fonksiyonları ve net değişim vektörleri görülebilir:

Reaksiyon	Eğilim fonksiyonu	Net değişim vektörü
$G_1 : A \rightarrow B$	$a_1(X(t)) = k_1 A(t)$	$v_1 = (-1, 1)^T$
$G_2 : B \rightarrow A$	$a_2(X(t)) = k_2 B(t)$	$v_2 = (1, -1)^T$

Burada, örneğin, G_1 geçişini belirleyen, net değişim vektörü v_1 şöyle düşünülmelidir: konum vektörünün birinci bileşeni olan A, 1 birim kullanılıyor, dolayısıyla $v_1(1) = -1$, benzer olarak konum vektörünün ikinci bileşeni olan B, 1 birim üretiliyor, dolayısıyla $v_1(2) = 1$ sonuç olarak $v_1 = (-1, 1)^T$. Yani herhangi bir $G_k : nA + mB \rightarrow pA + qB$ geçişi için $v_k = (p - n, q - m)^T$ şeklinde belirlenecektir.

Stokastik modelleme, bu geçiş sistemlerini **Markov zincirlerini** kullanarak açıklar. Peki nedir bu Markov zinciri? Markov zinciri, gelecekteki durumları sadece mevcut durumlarına bağlı olan, dolayısıyla olasılık yapısı geçmiş bilgisine ihtiyaç duymayan “unutkan” ve “hafızasız” süreçleri modeller. Bu süreçler günlük hayatta sıklıkla karşımıza çıkar: yarın havanın nasıl olacağı bugünün hava durumuna bağlıdır; bir asansörün sonraki katta durup durmayacağı sadece bulunduğu mevcut kata bağlıdır; yürüyen bir canlı her adımda yalnızca bir önceki adımına bakarak sağa veya sola devam eder (random walk); internetin bağlı-kopuk olması durumları arasındaki geçişler de sadece mevcut durumuna bağlıdır [2, 6, 8, 9]. Matematiksel olarak Markov özelliği herhangi bir X süreci için, $\mathbb{P}(\cdot)$ sistem dinamiklerini modelleyen olasılık fonksiyonunu göstermek üzere

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i^0, X_1 = i^1, X_2 = i^2, \dots, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla sürecin X_{n+1} ’deki durumu sadece mevcut durumu olan X_n ’e bağlıdır.

Şimdi eq. (1) ile verilen kendi modelimize dönebiliriz. Sistemimizde yaşanacak bir sonraki geçiş, sadece mevcut A ve B türlerinin miktarlarına bağlıdır. Bu Markov yapısını kullanan stokastik modellemeye göre eq. (1)’ile verilen sistemin konum vektörü *Rastgele Zamanlı Değişim Modelini (RZDM)* [1] sağlar. Ayrıca, sistemin olasılık fonksiyonunun zamana göre türevi *Temel Kimyasal Denklemi (TKD)* (Chemical Master Equation) adı verilen diferansiyel denklemi sağlar [3]. Dolayısıyla, deterministik modellemede sistem dinamiklerini incelemek için elimizde tek bir adi diferansiyel denklem varken, stokastik modelleme de RZDM ve TKD olacak şekilde iki denklem vardır.

RZDM’nin mantığı son derece basittir: Sistemin $t > 0$ anındaki konum vektörünü elde etmek için, sistemin başlangıçtaki konum vektörüne, $X(0)$, her bir geçiş kaç kere oluyorsa, karşılık gelen net değişim vektörünü o kadar ekle. Elimizde r tane geçişe sahip olan bir sistem olduğunu düşünelim. Bu sistemi modelleyen RZDM aşağıdaki şekildedir.

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^r \xi_k v_k,$$

burada ξ_k, G_k geçişinin kaç kere gerçekleşeceğini gösteren bir sayma sürecidir. Bu sayı, ortalaması eğilim fonksiyonunun zaman içindeki integraline bağlı bir *Poisson sürecidir*. Dolayısıyla sistemin konum vektörünün zamana göre değişimi, deterministik modellemede pürüzsüz bir eğri ile temsil edilirken, stokastik modellemede “*sıçramalı eğriler*” ile temsil edilir.

RZDM, sistemin konum vektörünün gerçekleştirebileceği tek bir yolu modellerken; TKD ise sistemin olası tüm geçişlerinin olasılıklarının zaman içinde nasıl değişeceğini modeller. Dolayısıyla, RZDM sistem için olası tek bir yol sunarken, TKD tüm yolların ihtimallerini veren bir diferansiyel denklem sunar. Bu nedenle teorik analizlerde TKD daha yaygın olarak kullanılır. Bu denklem, sistemin belirli bir durumda bulunma olasılığının zamana göre nasıl değiştiğini ifade eder. Sistemin mevcut durumdaki olasılığı: (i) diğer durumlardan mevcut duruma yapılan geçişlerle artarken (ii) mevcut durumdan başka durumlara yapılan geçişlerle azalır.

Elimizde r tane geçişe sahip, $X(t) = x$ konumunda olan bir sistem olduğunu ve $\mathbb{P}(x; t) = \mathbb{P}(X(t) = x)$ 'nin sistemin bir t anında x konumunda bulunması olasılığını gösteren fonksiyon olduğunu düşünürsek, sistemi modelleyen TKD aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(x; t) = \sum_{k=1}^r \left(a_k(x - v_k) \mathbb{P}(x - v_k; t) - a_k(x) \mathbb{P}(x; t) \right).$$

Burada her bir terim için $a_k(x - v_k) \mathbb{P}(x - v_k)$, $x - v_k$ konumundan x konumuna gelen *giriş* oranını; $a_k(x) \mathbb{P}(x)$ ise x durumundan başka konumlara *çıkış* oranını göstermektedir.

eq. (1) ile verilen sistem için $X(t) = (A(t), B(t))^T$ konum vektörünü kullanarak, her bir durum için

$$\mathbb{P}(A, B; t) := \mathbb{P}(A(t) = A, B(t) = B)$$

olasılıklarını tanımlayalım. Bu durumda sistemi modelleyen TKD,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{P}(A, B; t) &= k_1(A + 1) \mathbb{P}(A + 1, B - 1; t) - k_1 A \mathbb{P}(A, B; t) \\ &\quad + k_2(B + 1) \mathbb{P}(A - 1, B + 1; t) - k_2 B \mathbb{P}(A, B; t) \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde yazılır. Burada, tanımsız durumlar için $\mathbb{P} = 0$ kabul edilir [11].

Şimdi, örnek olarak $A = \{0, 1\}$ ve $B = \{0, 1\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, sistemin konum uzayı $\mathcal{X}$ dört farklı elemandan oluşacaktır:

$$\mathcal{X} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\},$$

bu ise bize aşağıdaki TKD denklemini verir:

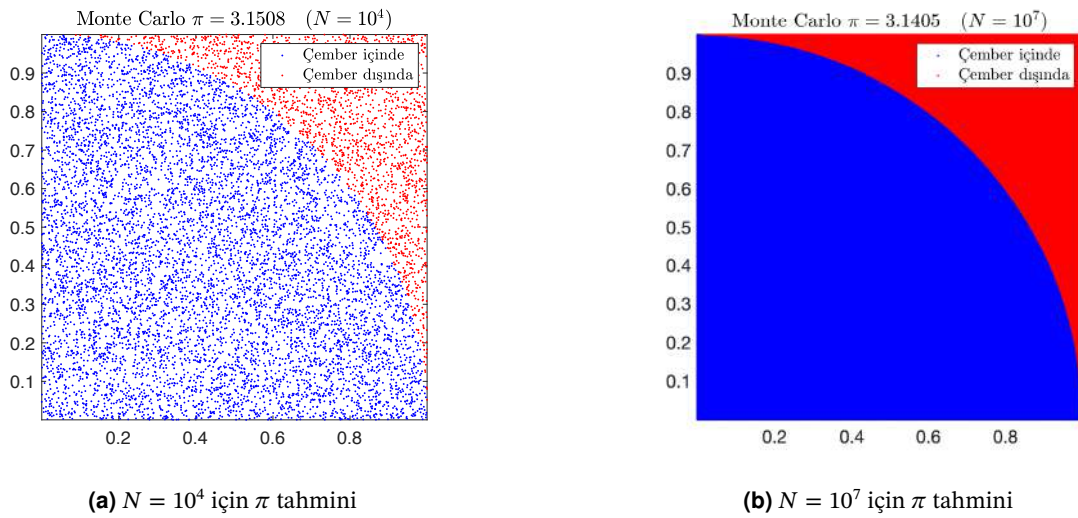
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{P}(0, 0; t) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \mathbb{P}(1, 0; t) &= k_2 \mathbb{P}(0, 1; t) - k_1 \mathbb{P}(1, 0; t), \\ \frac{d}{dt} \mathbb{P}(0, 1; t) &= k_1 \mathbb{P}(1, 0; t) - k_2 \mathbb{P}(0, 1; t), \\ \frac{d}{dt} \mathbb{P}(1, 1; t) &= -(k_1 + k_2) \mathbb{P}(1, 1; t). \end{aligned}$$

Daha genel bir durumda, $A = \{0, 1, \dots, n\}$, $B = \{0, 1, \dots, m\}$ olacak şekilde genişlerse, bu durumda olası konumlarını sayısı, yani $\mathcal{X}$ 'in eleman sayısı $(n + 1) \times (m + 1)$ olacaktır. Tür sayılarının ikiden fazla olabildiği, her bir türün miktarının yüzbinlerle hatta milyonlarla ifade edildiği gerçek sistemlerde bu denklemin boyutu o kadar büyük ki TKD'yi doğrudan çözmek neredeyse imkansız hale gelir.

Elimizde sistem dinamiklerini modelleyen TKD olduğunda sistemin konumunun zamana göre nasıl değiştiğini üretmek için Gillespie tarafından önerilen *stokastik simülasyon algoritmalarını* (SSA) kullanırız.

Bu algoritmalar, geçiş hızlarını belirleyen, eğilim fonksiyonlarını kullanarak geçişlerin hangi sırayla ve hangi zamanda gerçekleşeceğini modele ait olasılıkları kullanarak belirler ve böylece sistemin muhtemel bir yolunu çıkarır. Bu yöntem, temelinde olasılık kurallarına göre rastgele seçimler yapan bir Monte Carlo metodudur. Kısaca özetlemek gerekirse, olasılık dağılımlarından rastgele örnek çeken bir yöntemdir [4].

Monte Carlo yöntemi, aslında insanların hayatın her aşamasında kullandığı: *bir sonuca varmak için defalarca deneme prensibine* dayanır. Bu yöntem, analitik olarak çözümü oldukça zor olan karmaşık problemlerin çözümlerine, problemlerin tanımlandığı olasılık dağılımından çok sayıda rastgele örneklem alarak yaklaşır [5]. Örneğin, kenar uzunluğu 1 birim olan bir karenin içerisine, rastgele noktalar atıp bu noktaların ne kadarının birim çember içine düştüğünü sayarak π sayısını yaklaşık olarak hesaplayabiliriz [10]. Buradaki temel fikir, çember ve karenin alanları arasındaki bağlantının doğrudan π sayısına bağlı olmasıdır. Rastgele seçilerek koyulan noktalar arttıkça, π sayısı için daha doğru bir yaklaşım elde edilecektir. Örneğin, nokta sayısı $N = 10^4$ iken $\pi \approx 3.1508$ olarak elde edilir (bkz. fig. 1a), $N = 10^7$ için ise $\pi \approx 3.1405$ olarak bulunur (bkz. fig. 1b).



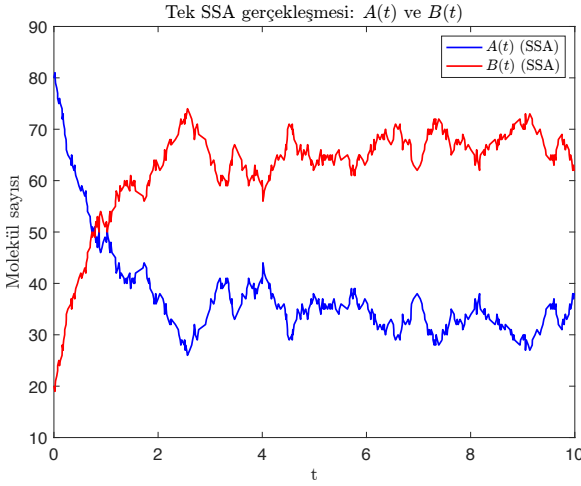
Şekil 1. Farklı örneklem sayıları için Monte Carlo yöntemi kullanılarak elde edilen π tahminleri.

Gillespie'nin SSA'larını, Markov süreçleri ile modellenen bir sistemde, gerçekleşecek olayları, rastgele seçen bir karar mekanizması olarak düşünebiliriz. Bu seçimler, elbette belli kurallar dahilinde gerçekleşir. SSA'lara göre, gerçekleşecek her olayın bir gerçekleşme olasılığı vardır. Bu olasılık daha yüksekse olay daha hızlı yani sık gerçekleşir.

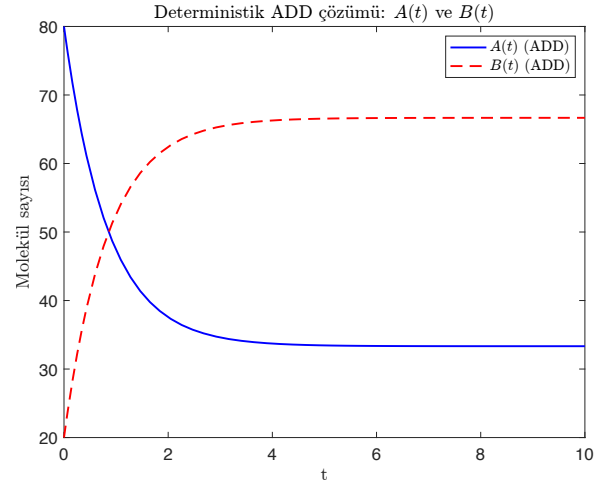
Şimdi eq. (1)'de verilen sistemin dinamiklerine dönebiliriz. Bu sistemde yer alan G_1, G_2 geçişlerinin gerçekleşme olasılıkları eğilim fonksiyonları kullanarak belirlenir. SSA'lar her adımda iki karar verir: (1) bir sonraki geçiş ne zaman olacak? (2) hangi geçiş gerçekleşecek?. Gerçekleşen geçişin net değişim vektörü kullanarak sistemin konum vektörleri güncellenir. Bu kararlar tamamen olasılık kurallarına göre verilir. Dolayısıyla, Gillespie'nin SSA'ları aslında sistem dinamiklerini *hangi geçiş, ne zaman* sorularını rastgele seçimlerle cevaplayarak çözen bir Monte Carlo metodudur [4]. SSA algoritmaları, her bir simülasyonlarında TKD'yi kullanarak üzerinde çalışılan sistemin olası bir gerçekleşmesini (yolunu) verir.

Şimdi, eq. (1)'de verilen sistemin dinamiklerini stokastik ve deterministik modelleme yoluyla inceleyebiliriz. Sistem dinamiklerini, stokastik modellemede, eq. (3)'ün olası bir gerçekleşmesini SSA algoritmalarıyla üreterek; deterministik modellemede ise eq. (2)'de verilen ADD denkleminin çözümünü kullanarak inceleyeceğiz. SSA algoritmasının ürettiği olası bir gerçekleşmede A, B türlerinin zamana bağlı davranışları sıçramalı ve düzensiz bir yol izlerken (bkz. fig. 2a); ADD modelinin çözümü ile elde edilen sistem dinamikleri daha sakın ve kesintisiz bir yol izlemektedir (bkz. fig. 2b).

Sistem dinamiklerini mikroskobik ölçütte inceleyen stokastik modelleme ile makroskobik ölçütte inceleyen deterministik modelleme birbirlerinden tümüyle de bağımsız değildirler. Üzerine çalışılan sistemde, stokas-



(a) Tek SSA gerçekleşmesi.



(b) ADD çözümü

Şekil 2. (a) eq. (3)'te verilen TKD'nin Gillespie'nin önerdiği SSA'lar ile elde edilen olası bir yolu (b) eq. (2) ile verilen deterministik ADD sisteminin çözümü. Stokastik modelde sistem dinamikleri sıçramalı ve gürültülü; deterministik modelde ise sistem dinamikleri pürüzsüz bir eğri şeklinde elde edilir.

tik modelleme ile elde edilen *tür miktarlarının ortalama değerlerinin* zamana göre değişimleri, deterministik modelleme ile elde edilen ADD denkleminde yaklaşık bir davranış gösterir. Hatta eğer eğilim fonksiyonları lineerse, yani her bir geçiş en fazla tek bir türden oluşan girdiye sahipse, bu durumda tür miktarlarının ortalamasının zamana göre türevlerini gösteren ADD, deterministik modelleme yoluyla elde edilen ADD ile tam olarak çakışır.

Bu durumu eq. (1) üzerinden inceleyelim. Ortalama tür sayılarını,

$$\bar{A}(t) := \mathbb{E}[A(t)] = \sum_{A,B} A \mathbb{P}(A, B; t), \quad \bar{B}(t) := \mathbb{E}[B(t)] = \sum_{A,B} B \mathbb{P}(A, B; t)$$

şeklinde gösterelim.

Ortalama tür sayıları için diferansiyel denklemler: Önce $\bar{A}(t)$ için:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{A}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{A,B} A \mathbb{P}(A, B; t) = \sum_{A,B} A \frac{d}{dt} \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= \sum_{A,B} A \left[k_1(A+1) \mathbb{P}(A+1, B-1; t) + k_2(B+1) \mathbb{P}(A-1, B+1; t) - (k_1 A + k_2 B) \mathbb{P}(A, B; t) \right]. \end{aligned}$$

Şimdi, ilk iki terimde, olasılık ifadelerini aynı indeksler üzerinden toplamak için basit bir indeks kaydırması yapacağız. Birinci terimde yer alan $\mathbb{P}(A+1, B-1; t)$ ifadesini yeni indekslerle yazmak üzere $A' = A+1$ ve $B' = B-1$ olarak tanımlayalım. Böylece bu terim $\mathbb{P}(A', B'; t)$ biçimine dönüşür. Benzer olarak, ikinci terimdeki $\mathbb{P}(A-1, B+1; t)$ terimi için $A' = A-1$ ve $B' = B+1$ olarak belirleyelim, bu terim de aynı şekilde $\mathbb{P}(A', B'; t)$ şeklinde yeniden yazılabilir. İndeks kaydırması yalnızca toplama değişkenlerinin adını değiştirdiği için toplamın değeri değişmez; bu nedenle toplamı yine A, B indeksleriyle ifade edeceğiz.

Bu indeks kaydırmalarını uyguladığımızda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{A}(t) &= \sum_{A,B} \left[-k_1 A + k_2 B \right] \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= -k_1 \sum_{A,B} A \mathbb{P}(A, B; t) + k_2 \sum_{A,B} B \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= -k_1 \bar{A}(t) + k_2 \bar{B}(t), \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{d}{dt}\bar{A}(t) = -k_1\bar{A}(t) + k_2\bar{B}(t). \quad (4)$$

Benzer şekilde $\bar{B}(t)$ için:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{B}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{A,B} B \mathbb{P}(A, B; t) = \sum_{A,B} B \frac{d}{dt} \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= \sum_{A,B} [k_1 A - k_2 B] \mathbb{P}(A, B; t) \\ &= k_1 \bar{A}(t) - k_2 \bar{B}(t), \end{aligned}$$

yani

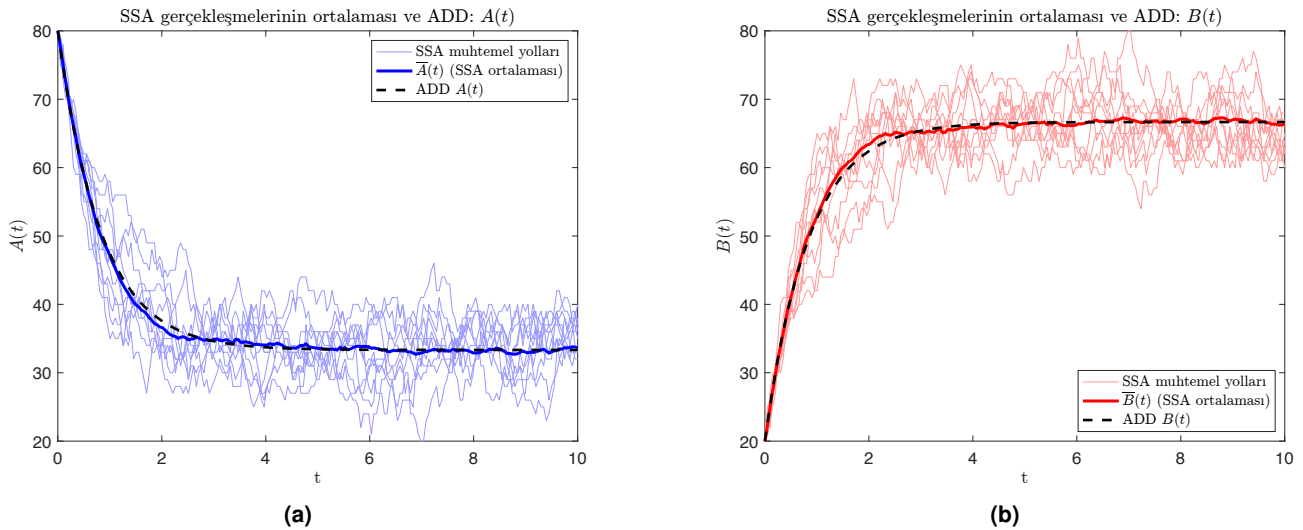
$$\frac{d}{dt}\bar{B}(t) = k_1\bar{A}(t) - k_2\bar{B}(t). \quad (5)$$

Deterministik ADD ile uyum

Deterministik modelde elde ettiğimiz, eq. (2) ile verilen ADD sisteminde eğer

$$\bar{A}(t) := E[A(t)], \quad \bar{B}(t) := E[B(t)]$$

şeklinde tanımlarsak, eq. (4) ve eq. (5) tam olarak eq. (2) ile çakışır. Yani bu basit örnekte, stokastik olarak modellenen tür miktarlarının ortalama değerlerinin zamana göre türevleri deterministik model ile elde edilen ADD denklemini sağlar ve “çok sayıda SSA gerçekleşmesinin ortalaması = ADD çözümü” gözlemini teorik olarak doğrular. Bu doğrulama aşağıdaki şekillerde net bir şekilde görülebilir.



Şekil 3. (a) Çoklu SSA simülasyonlarının ortalaması ile deterministik ADD çözümünün $A(t)$ üzerindeki karşılaştırması (b) aynı karşılaştırmının $B(t)$ için elde edilen sonucu. Her iki durumda da tekil SSA gerçekleştirmeleri stokastik ve sıramalı bir yapı sergilerken, bu gerçekleştirmelerin ortalaması deterministik ADD çözümüyle tam olarak çakışmaktadır. Bu sonuç, ADD denkleminin incelenen sistemin ortalama davranışını temsil ettiğini, SSA algoritmalarının ise tek bir stokastik rastgele örnek yolu ürettiğini açıkça göstermektedir.

Bu basit iki geçişli örnek, stokastik ve deterministik yaklaşımların aynı süreci iki farklı ölçekte nasıl yorumladığını açıkça göstermektedir. SSA algoritmaları süreçlerin rastlantısal yollarını ortaya koyarken, ADD modeli bu süreçlerin ortalama davranışını tanımlar. Böylece Markov–Monte Carlo stokastikliği ile ADD deterministikliği, aynı dinamiğin birbirini tamamlayan iki yüzü olarak ortaya çıkar. Bu iki bakış açısının birlikte ele alınması, karmaşık sistemlerin doğasını anlamak için güçlü ve bütüncül bir çerçeve sunar.

■ Kaynaklar

- [1] D. F. Anderson and T. G. Kurtz. Continuous time Markov chain models for chemical reaction networks. In *Design and analysis of biomolecular circuits: engineering approaches to systems and synthetic biology*, pages 3–42. Springer, 2011.
- [2] R. W. Darling and J. R. Norris. Differential equation approximations for Markov chains. 2008.
- [3] D. T. Gillespie. A rigorous derivation of the chemical master equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 188(1-3):404–425, 1992.
- [4] D. T. Gillespie. Stochastic simulation of chemical kinetics. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 58(1):35–55, 2007.
- [5] J. Hammersley. *Monte Carlo methods*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] V. G. Kulkarni. Modeling and analysis of stochastic systems, 2016.
- [7] J. D. Murray. *Mathematical biology: I. An introduction*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2007.
- [8] J. R. Norris. *Markov chains*. Number 2. Cambridge university press, 1998.
- [9] J. Smiesko, M. Kontsek, and K. Bachrata. Markov-modulated on–off processes in IP traffic modeling. *Mathematics*, 11(14):3089, 2023.
- [10] S. Strbac-Savic, A. Miletic, and H. Stefanović. The estimation of Pi using Monten Carlo technique with interactive animations. In *8th International Scientific Conference" Science and Higher Education in Function of Sustainable Development-SED*, volume 2015, 2015.
- [11] D. J. Wilkinson. *Stochastic modelling for systems biology*. Chapman and Hall/CRC, 2018.

Mutlu Hatanın Kanat Çırpışı: Kelebek Etkisi ve Kaos Teorisi

BATUHAN DEMİRBAŞ

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü 4. Sınıf Öğrencisi

✉ dmrbsbatuhan@gmail.com



Hepimiz, bilimsel bir hatanın büyük değişimlere yol açtığı hikâyeleri biliriz. Bu yazıda, bu tür anlatıların en çarpıcı örneklerinden biri olan *Kelebek Etkisini* inceleyeceğiz.

Bu etkinin ortaya çıkışı, 1960'lı yıllarda Meteorolog Edward Norton Lorenz'in yürüttüğü sayısal bir deneyle doğrudan ilişkilidir. Lorenz'in basit bir hava durumu simülasyonunda yaptığı küçük bir yuvarlama hatası, Kaos Teorisi'nin kapısını aralamıştır. Bu 'mutlu hata', deterministik sistemlerde başlangıç koşullarındaki son derece küçük farkların zamanla büyük ve öngörülemez sonuçlara dönüşebileceğini göstermiştir.

Yazı boyunca, bu hassasiyetin izini sürerek kaosu rastgele bir düzensizlik olmadığını, aksine, garip çekiciler (strange attractors) ve fraktal geometri ile tanımlanabilen gizli bir matematiksel düzene sahip olduğunu göstereceğiz. Ayrıca, başlangıç koşullarına olan bu aşırı hassasiyetin, hava durumu tahminlerinden finans piyasalarına kadar pek çok sistemin dinamik yapısını nasıl şekillendirdiğini birlikte inceleyeceğiz.

■ Lorenz'in Mutlu Hatası ve Kelebek Etkisi'nin Doğuşu

Kaos Teorisi'nin doğuşu, 1961 yılında MIT'de görevli meteorolog ve matematikçi Edward Norton Lorenz'in rutin bir hava durumu simülasyonu çalışmasına dayanır. Lorenz, atmosferdeki konveksiyon akımlarını modelleyen, doğrusal olmayan on iki değişkenli bir denklem sistemi üzerinde çalışırken, zamandan tasarruf etmek amacıyla, daha önceki bir simülasyonun çıktısını başlangıç değeri olarak kullanmaya karar verir. Ancak bilgisayarın belleğindeki tam değeri (0.506127) girmek yerine, çıktıda gördüğü yuvarlanmış değeri (0.506) yazarak simülasyonu tekrar başlatır. Girdi verileri arasındaki bu binde birlik fark, bir kelebeğin kanat çırpışının yaratacağı hava akımı kadar bile değildir. Lorenz'in beklentisi, yeni simülasyonun bir öncekiyle neredeyse aynı yolu izlemesidir. Ancak bir süre sonra iki çıktı tamamen farklı yönler sapmış, sistemin gidişatı radikal bir biçimde değişmiştir. Bu gözlem, o güne kadar hüküm süren ve her şeyin kesin



Edward Norton Lorenz

0.124	1.887	0.158	1.417	5.488
0.483	2.694	1.485	2.170	1.115
1.497	2.224	2.255	2.618	5.418
0.951	1.497	0.354	2.116	1.487
0.943	0.189	0.567	1.121	0.176
1.541	5.417	0.217	2.268	1.576
3.152	0.185	1.184	0.506	7.465
1.946	0.113	3.541	1.002	1.597
0.467	3.004	3.140	2.597	3.687
0.398	2.111	5.897	1.462	2.689
1.531	0.208	9.898	0.123	5.488
7.530	2.408	0.666	0.587	0.487
1.576	0.702	3.855	0.942	2.221
5.554	1.607	3.661	1.574	7.165
2.367	3.875	3.854	0.187	0.487
1.059	0.279	1.261	0.489	5.034
0.002	1.568	1.746	2.497	4.442
0.755	1.745	4.123	3.487	3.331

Lorenz'in Mutlu Hatası

olarak hesaplanabilir olduğunu savunan klasik deterministik anlayışı kökten sarsmıştır. Lorenz, sistemin kuralları tamamen belirli (deterministik) olsa bile, başlangıçtaki bu mikroskobik farkların zamanla devasa bir öngörülemezliğe yol açtığını fark etmiştir. Lorenz'in **Başlangıç Koşullarına Hassas Bağımlılık** adını verdiği bu fenomen, daha sonra dünya çapında ün kazanacak olan **Kelebek Etkisi** metaforuyla somutlaşmıştır.

■ Kaosun Tarihi Temsilcileri ve Öncüleri

Lorenz'in bulguları modern Kaos Teorisi'nin en somut örneğini sunsa da teorinin kökleri çok daha eskilere uzanır. 19. yüzyılın sonlarında Fransız matematikçi Henri Poincaré, ünlü **Üç Cisim Problemi** üzerinde çalışırken, sistemin yörüngelerinin beklenenden çok daha karmaşık ve istikrarsız olduğunu fark etmiştir. Poincaré, kaotik davranış gösteren yörüngelerin asla tam olarak tekrar etmediğini ve belirli bir eşikten sonra tamamen öngörülemez hale geldiğini göstererek, bugün kaos olarak adlandırdığımız kavramın matematiksel temellerini atmıştır.



Henri Poincaré

1970'li yıllara gelindiğinde ise biyolog Robert May, popülasyon dinamiklerini inceleyen basit bir Lojistik Denklem'in bile belirli parametre değerlerinden sonra nasıl kaotikleşebileceğini kanıtlamıştır. Lorenz'in atmosferik modelleri ve May'ın popülasyon denklemleri, karmaşıklığın sadece çok değişkenli sistemlerde değil, son derece basit denklemlerde bile saklı olabileceğini dünyaya göstermiştir.



Robert May

Artık biliyoruz ki, doğrusal olmayan dinamikler, evrendeki beklenmedik karmaşıklığı doğuran temel yapıdır. Peki bu matematiksel karmaşıklık hangi geometrik yapılarla ilişkilidir? Kaosun içindeki bu gizli geometrik düzeni, Benoît Mandelbrot ve onun meşhur fraktalları ile keşfedeceğiz.

■ Kaosun Parmak İzi: Fraktal Geometri ve Özbenzerlik Prensibi

Kaotik sistemlerin sergilediği karmaşık davranışlar, bilim dünyasını alışlagelmiş Öklid geometrisinin (nokta, doğru, küre) yetersiz kaldığı yeni bir geometri arayışına itmiştir. Bu arayışın en önemli temsilcisi, Kaos Teorisi'nin gelişiminde kilit rol oynayan matematikçi Benoît Mandelbrot olmuştur.



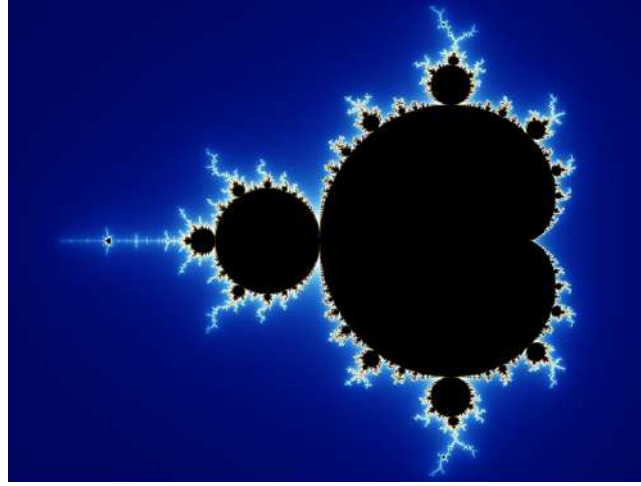
Benoît Mandelbrot

Mandelbrot, "*Bulutlar küre, dağlar koni, kıyı şeritleri ise birer doğru değildir*" diyerek, doğadaki karmaşık ve düzensiz yapıların klasik geometriyle tanımlanamayacağını savunmuştur. Bu yapıları tanımlamak için Latince *fractus* (parçalanmış/kırılmış) kelimesinden türettiği **fraktal** terimini ortaya atmıştır. Fraktallar, en basit ifadeyle, bir parçanın bütünü özelliğini birebir taşıması esasına dayanan özbenzerlik (self-similarity) niteliğine sahip yapılardır. Mandelbrot, bu keşfiyle aslında düzensizliğin de kendine has, hassas bir geometrisi olduğunu kanıtlamıştır.



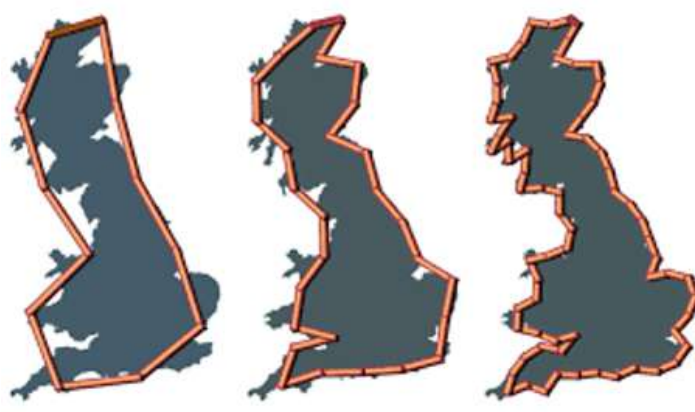
Doğada Fraktallar

Tanrı'nın parmak izi olarak da bilinen **Mandelbrot Kümesi**, sonsuz detayı ve kendi kendine benzeyen yapısıyla, kaotik sistemlerin en çarpıcı görselidir. Bu kümeyi ne kadar büyütürseniz büyütün, ana yapının küçük kopyaları tekrar tekrar karşınıza çıkar.



Mandelbrot Kümesi

Bu durumu coğrafi bir perspektifle ele alalım. İngiltere'nin kıyılarını ne kadar küçük cetvellerle ölçerseniz o kadar girinti ve çıkıntıyı hesaba katmak durumunda kalırsınız ve uzunluk sonsuza yaklaşan değerler alır. Fraktalları görmek için Amerika'yı her seferinde yeniden keşfetmeye gerek yoktur. Kendimizden başlayıp doğanın her köşesinde onlara rastlayabiliriz. Ciğerlerimizdeki bronşlardan ağaçların dallarına kadar...



Sahil Şeridi Paradoksu

■ Laplace'ın Şeytanına Karşı Kaos Teorisi: Belirsizliğin Felsefesi

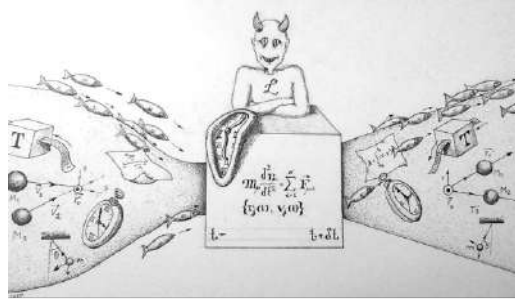
Kaos Teorisi'nin en büyük felsefi etkisi, yüzyıllardır bilimin temel direği olan katı determinizm fikrine meydan okumasıdır. Bu belirsizlik bizi şu can alıcı soruya getirir: Bilmek gerçekten mümkün müdür?

Mandelbrot Kümesi'nin 'Tanrı'nın Parmak İzi' olarak bilinmesinden de anlayabildiğimiz gibi, kaosu keşfedildiği dönemlerde Tanrıcılık ve her şeyin bir nizam içinde olduğu inancı oldukça yaygındır. Hatta o dönemde hesaplanabilir kader düşüncesine o kadar sarsılmaz bir güven duyuluyordu ki, matematikçi Abraham de Moivre, uyku süresindeki günlük 15 dakikalık artışlardan yola çıkarak toplam uyku süresinin 24 saate ulaşacağı günü hesaplamış ve tam da o gün vefat etmiştir.

Geleneksel olarak bu dönemde, Pierre-Simon Laplace'ın adıyla anılan Laplace'ın Şeytanı kavramı hâkimdir: *Evrenin o anki durumunu ve tüm güçleri bilen bir zekâ (Şeytan), geleceği de görebilir.* Bu, her şeyin önceden belirlendiği anlamına gelir ve Kaos Teorisi'ne kadar bu determinizm sarsılmamıştır. Matematikçiler bile bu kaderci hesaplamalara güvenmektedir.



Pierre-Simon de Laplace



Laplace'ın Şeytanı

Ne var ki Kaos Teorisi bu iddiaları çürütmüştür. Teoriye göre, evrenin durumunu sonsuz hassasiyetle ölçmek imkânsızdır ve bu yüzden geleceği tamamen öngörmek de bir hayaldir. Kaos, üstel büyüme yoluyla çalışır; bu da başlangıç koşullarındaki en ufak bir belirsizliğin bile kısa sürede kontrolden çıkacağını gösterir. Ayrıca bize, bu küçük hataların hep var olacağını ve belirsizliğin bir anlamda kaderimiz olduğunu kanıtlar. Bu yönüyle kaos, sistemin kurallarla belirlendiği ancak bizim öngörü yeteneğimizin sonsuza dek sınırlı kaldığı bir belirsizlik kanıtıdır.

■ Günlük Hayatta Kaosu Selamladığımız Alanlar

Kaos Teorisi sadece soyut bir matematiksel çalışma veya felsefi bir tartışma alanı değildir; gündelik yaşamdan karmaşık fiziksel sistemlere kadar her yerde karşımıza çıkar.

Örneğin atmosferik koşullar, tipik bir kaotik sistemdir ve bu teori, hava durumu tahminlerinin neden genellikle 5-6 günle sınırlı kaldığını bizlere açıklar. Atmosferdeki moleküler çarpışmalar arttıkça, başlangıç verisindeki en küçük eksiklik sistemi öngörülemez bir kaosa sürükler. Benzer şekilde finans piyasalarında borsa dalgalanmaları, başlangıçtaki mikro değişimlere aşırı hassasiyet gösterdiği için asla %100 tahmin edilemezler. Trafik akışında tek bir aracın anlık yavaşlamasının kilometrelerce sürecek bir tıkanıklığa yol açması veya biyolojik sistemlerdeki popülasyon değişimleri, kaosun hayatımızın içindeki diğer tezahürleridir. Hatta basit fizik kurallarına uyan bir çift sarkaç bile, başlangıçtaki milimetrik farklılıklar nedeniyle kısa sürede tamamen öngörülemez bir hareket sergilemeye başlar.



günlük hayatta kaos

Sonuç olarak, Lorenz'in bir kelebek ağırlığından bile küçük olan o meşhur hatası, bilime bakış açımızı kökten değiştirmiştir. Başlangıçta bir felaket olarak görülebilecek bir hesaplama hatasının, bilim tarihine mutlu sıfatıyla geçmesi bizlere şu soruyu hatırlatır: Her hata gerçekten kötü sonuçlar mı doğurur? Aslında bu dünyada hepimiz birer küçük kelebek gibiyiz; çırpıtığımız her kanat ardında yeni bir hikâye saklıdır ve verdiğimiz en küçük kararlar bile devasa bir zincirleme reaksiyonun başlangıcı olabilir.

Kaos Teorisi, bilim insanlarına kontrol edilemez olanı kucaklamayı öğreten bir ders sunar. Tüm o matematiksel karmaşa bize aslında tek bir gerçeği söylemektedir: Mükemmel öngörü bir illüzyondur. O minicik fark, bizi determinizmin katı zincirlerinden kurtararak, rastgeleliği bir kusur olarak değil, keşfedilmeyi bekleyen yeni düzenlerin ve olasılıkların heyecan verici bir kapısı olarak görmemizi sağlamıştır. Lorenz’in öyküsünde de gördüğümüz gibi, hata yapmak her zaman olumsuz bir getiri sunmaz; aksine bazen hakikate giden en kestirme yoldur.

Hatalarımızın hep ‘mutlu’ olması dileğimle...

■ Kaynaklar

- [1] J. Gleick, Chaos: Making a New Science. New York, NY, USA: Viking Penguin, 1987.
- [2] E. N. Lorenz, The Essence of Chaos. Seattle, WA, USA: University of Washington Press, 1993.
- [3] B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature. New York, NY, USA: W. H. Freeman and Company, 1983.
- [4] I. Prigogine and I. Stengers, Order Out of Chaos: Man’s New Dialogue with Nature. New York, NY, USA: Bantam Books, 1984.
- [5] D. Ruelle, Chance and Chaos. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1991.
- [6] Wikipedia, “Butterfly Effect.” https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect. [Erişim tarihi: 05 Ocak 2026].

Matematiğin İzinde Kitaplar

PINAR AYDOĞDU

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

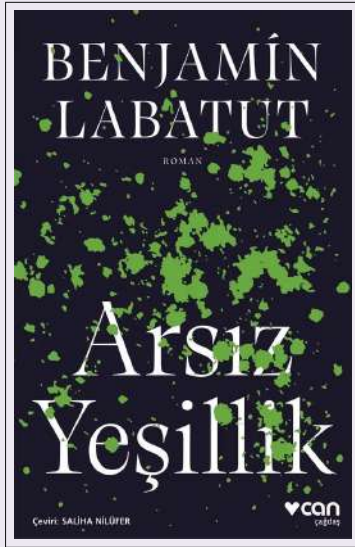
✉ paydogdu@hacettepe.edu.tr



Büyük hocamız Cahit Arf, matematiği “anlamanın” sabır gerektirdiğini, ancak bunun erişilmez bir güçlük olmadığını söyler. Bu ayki kitap seçkisi, işte bu “anlama” çabasının üç farklı yüzünü sunuyor bize. Bazen Benjamin Labatut’un “Arsız Yeşillik”inde olduğu gibi bilim tarihinin karanlık ve puslu dehlizlerinde, bazen Riemann Hipotezi’nin peşinde evrenin en büyük sırrını çözmeye çalışırken, bazen de 1950’lerin Erzurum’unda bir halk konferansında karşımıza çıkıyor bu tutku. Hadi gelin, matematiğin kurgu, popüler bilim ve tarihle kesiştiği bu zengin yolculuğa beraber çıkalım.

■ Bilmenin Laneti: Dâhilik, Delilik ve Arsız Yeşillik

Arsız Yeşillik – Benjamin Labatut (Çev. Saliha Nilüfer), Can Yayınları (2023)



Arsız Yeşillik, Şilili yazar Benjamin Labatut ile tanışma kitabım oldu. İlk satırlardan itibaren büyülediğimi, fakat kitapta ilerledikçe biraz da bocaladığımı itiraf etmeliyim. Bu bocalamamın ilk sebebi, kitabın kapağında tür olarak ‘ROMAN’ yazmasıydı. Ancak okuduklarım, temada bir bütünlük sağlasa da, aslında “bilim tarihinden öyküler” diyebileceğim, şu âna kadar literatürde yeri olmayan bir türdü. (Bu bağlamda, bu oluşturduğu yeni türde yazmaya devam ederse, Labatut’un ileride Nobel Edebiyat Ödülü adayı olması kuvvetli muhtemeldir.) İkinci bocalama sebebim ise, bilim tarihi ile kurguyu harmanlayan yazarın nerde ne kadar gerçeği anlattığını ayırt etmekte zorlanmamdı. O kadar çok bilim tarihi ve biyografi kitapları okumuş olmama rağmen, Labatut’un “öykülerini” okurken gerçek ile hayal zihnimde tuhaf bir sis oluşturdu. Bu da tabii ki, gerçek olaylarla kurgusal detayları iç içe geçiren yazarın kaleminin gücünü gösterir. Fakat bu durum, bende garip bir okuma hazzı ve heyecan da oluşturdu.

Kitabın ilk “öyküsü” Prusya Mavisi, kitabın en gerçekçi ve en sarsıcı bölümüdür. Labatut, kimya ve ölüm arasındaki ilişkiyi inceleyerek, bilimsel ilerlemenin hem kurtarıcı hem de yok edici olan çift yönlü doğasını vurgular bu bölümde. Kimyager Fritz Haber’in odağında, sentetik boya “Prusya Mavisi”nin keşfinden yola çıkarak siyanüre ve etkilerine uzanan bir tarihsel yolculuğa çıkarır okuyucuyu. Haber, havadaki azotu gübreye dönüştürerek milyarlarca insanı açlıktan kurtaran kahraman bir bilim insanıdır aslında. Ancak aynı Haber, I. Dünya Savaşı’nda klor gazını icat ederek kimyasal savaşı başlatan ve karısının intiharına sebep olan kişidir. Onun geliştirdiği pestisitler, daha sonra Naziler tarafından toplama kamplarında kullanılan Zyklon B’ye dönüşecektir. Kitabın bu bölümünde, Alan Turing’in şüpheli intiharına da yer verilir ve şöyle der Labatut: “Siyanürü cazip bulanlar sadece katiller ya da suikastçılar değil; Britanya hükümetinin eşcinselliğini cezalandırmak amacıyla kimyasal hadım etme uygulamasına maruz bıraktığı, bu yüzden göğüsleri büyüyen bilgisayar biliminin babası, dâhi matematikçi Alan Turing de içine siyanür konmuş bir elmayı

ısıarak intihar etmişti.” Her ne kadar resmi tarihe göre bir intihar olarak kabul edilse de ölümünün intihar mı yoksa bir kaza mı olduğu kesin olarak belirlenemeyen Turing, Labatut’un “öyküsünün” baş kahramanı değildir, ancak bir matematikçi olarak siyanür bağlantısı ile ölümünü kesin bir intihar ve masalsı bir veda olarak anlatması beni etkiledi.

Fritz Haber’in azotu bağlayarak gübreyi icat etmesi, I. Dünya Savaşı’nda klor gazını bizzat cephede yönetmesi, karısı Clara Immerwahr’ın (kendisi de bir kimyagerdir) kocasının bu “barbarlığına” dayanamayıp intihar etmesi tamamen tarihsel gerçektir. Ayrıca Nazilerin Haber’in geliştirdiği pestisit formülünü Zyklon B’ye dönüştürmesi de acı bir gerçektir. Yazarın burada yaptığı tek müdahale, karakterlerin iç dünyasındaki bazı duygusal betimlemelerdir; ancak olay örgüsü tarihe birebir sadıktır.

Öykünün sonu ise kitaba ismini veren arsız yeşillik değişiminin nereden geldiğini açıklar: Kurguya göre Haber, sonunda gerçekten suçluluk hisseder, ancak bu duygunun nedeni pek çok insanın ölümüne sebep olması değil; dünyanın dengesini bozarak bitkilerin kontrolsüzce serpileceği ve bütün canlıları arsız bir yeşillik altında boğacağı korkusudur.

Kitabın ikinci “öyküsüne” adını veren Schwarzschild Tekillliği, hem astrofiziğin hem de Benjamin Labatut’un kitabının en büyüleyici ve ürkütücü kavramlarından biridir. Basitçe söylemek gerekirse, evrenin “hata verdiği” noktadır. Olay 1915 yılında, I. Dünya Savaşı’nın en şiddetli döneminde, Rus cephesinde geçer. Karl Schwarzschild, Alman ordusunda bir topçu teğmenidir. Etrafında bombalar patlarken ve hardal gazı bulutları gezerken, eline Einstein’ın henüz yeni yayımladığı Genel Görelilik Teorisi geçer.

Einstein, bu denklemlerin sadece “yaklaşık” olarak çözülebileceğini düşünüyordu. Ancak Schwarzschild, siperlerde, balistik hesaplamalardan kalan zamanında imkânsız başardı: Denklemlere tam ve kesin bir çözüm buldu. Bunu bir mektupla Berlin’deki Einstein’a gönderdi. Schwarzschild’in matematiğinde tuhaf bir sınır ortaya çıktı. Bugün buna Schwarzschild Yarıçapı (R_s) denir. Bu yarıçap, G yerçekimi sabiti, c ışık hızı ve M kütle olmak üzere, şu formülle verilir:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Bu formül bir korkunç gerçeği gözler önüne serer: Evrendeki herhangi bir nesneyi (bir yıldız, bir gezegeni, hatta sizi) yeterince küçük bir alana sıkıştırırsanız, o nesne kendi kütleçekimi altında çökerek bir kara deliğe dönüşür. Schwarzschild’in hesaplarında matematik iki noktada “patlıyordu”, başka bir deyişle, sonsuza gidiyordu. Birincisi olay ufku, yani sınırdır. Zaman burada dışarıdaki bir gözlemci için durur. İkincisi ise, merkezdeki tekillik ki asıl dehşet buradadır. Kara deliğin tam merkezindeki noktadır. Burada hacim sıfırdır, yoğunluk sonsuzdur, zaman ve mekan anlamını yitirir. Kitapta Labatut, Schwarzschild’in bu tekillliği keşfettiğinde hissettiği dehşeti çok şiirsel anlatır. Schwarzschild, sadece matematiksel bir tuhaflık bulmamış; evrenin kalbinde, rasyonel aklın ve bilimin işleyemeyeceği, Tanrı’nın bile görmezden geldiği bir “kör nokta” bulmuştur.

Yazarın kurgusuna göre Schwarzschild, bu sonsuz sıkışmışlığın zihinsel yükünü kaldıramaz. Yaptığı her şeyde sınırları zorlayan Karl Schwarzschild, bağışıklık sisteminin cilde saldırdığı bir otoimmün hastalık olan pemfigüse yakalanır. Çok acılı olan bu hastalık, Schwarzschild’in bu “tekillğin” bedenindeki yansımasıdır. Evrenin kumaşındaki yırtık, adeta onun teninde kendini göstermiştir. Schwarzschild’in bu ağrılı ve acılı hastalığa yakalanarak hayatını kaybettiği bir gerçektir. Ancak, Labatut, Schwarzschild’in hastalığını ve ateşli sayıklamalarını, kara delik fikrinin (tekillğin) zihnine yaptığı baskıya bağlar. Schwarzschild’in ölmeden önce insanlığın sonunu gördüğüne dair kehanetvari vizyonları ve halüsinasyonları tamamen yazarın kurgusudur. Karl Schwarzschild’in I. Dünya Savaşı’nda Rus cephesindeyken Einstein’ın denklemlerini çözdüğü ve mektup arkadaşı oldukları da doğrudur. Hatta, gerçek hayatta Einstein, Schwarzschild’in matematiğinden çok etkilenmiş ama fiziksel sonucundan nefret etmiştir. Yıllarca (1939’a kadar), “Matematik doğru olabilir ama doğa bizi bu kadar çirkin bir şeyden korur, böyle şeyler gerçekte oluşamaz” diyerek kara delik fikrini reddetmiştir. Ancak, Robert Oppenheimer ve Hartland Snyder’in 1939’da yayımladığı bir makalede kara deliklerin oluşabileceği şüpheye yer bırakmayacak

şekilde kanıtlanmıştır.

Gelelim benim favori öyküme: Kalbin Can Damarı. Bu bölümde ana karakterimiz, cebirsel geometrinin kurucusu Alexander Grothendieck. Öykü, Japon matematikçi Shinichi Mochizuki'nin " $a+b=c$ " sanısını kanıtladığını iddia etmesi ve matematik dünyasının bunu anlamakta zorlanması ile başlar ki bu tarihsel bir gerçektir. Mochizuki, Grothendieck'i üstat olarak görüyordu. Gerçekten de, Alexander Grothendieck, sadece Arsız Yeşillik kitabının değil, tüm 20. yüzyıl bilim tarihinin en gizemli, en radikal ve belki de en hüznümlü figürüdür. O, matematiği sayılardan arındırıp saf kavramlara dönüştürdü. Kitapta da değinildiği gibi, kariyerinin zirvesindeyken (Fields Madalyası'nı almışken) her şeyi bir anda bıraktı. Çalıştığı enstitünün, Savunma Bakanlığı'ndan küçük bir miktar bağış aldığını öğrendi. Ancak, Grothendieck'in, babası Naziler tarafından öldürülmüş bir anarşist ve radikal bir pasifist idi. Bu nedenle, bilimin "öldürme sanatı"na hizmet etmesine tahammülü yoktu. İstifa etti. Matematik camiasını "tehlikeli ve etik dışı" olmakla suçladı. Matematik derslerini tamamen bıraktı ve Vietnam Savaşı karşıtı gösterilerde "hayatta kalma" dersleri vermeye başladı. Bu aşamadan sonra, Grothendieck, deliliğin ve mistikliğin sınırlarında yaşamaya başlar. Labatut'un kitabında vurgulamak istediği "karanlık nokta" tam olarak burasıdır. Grothendieck, Pireneler'de küçük bir köye (Lasserre) yerleşti ve 2014'teki ölümüne kadar tam bir keşiş hayatı yaşadı. Labatut'un kurgusunda Grothendieck, "uzayın kalbinde" insanlığın hazır olmadığı bir şey görmüş gibidir. Gerçekte de Grothendieck, Récoltes et Semailles (Hasatlar ve Ekimler) adlı devasa otobiyografik eserinde, bilim dünyasının ruhunu şeytana sattığını, yaratıcılığın yok edildiğini ve egonun bilimi çürüttüğünü anlatır. Matematiği bıraktığını söylese de, geceler boyunca binlerce sayfa yazı yazdı. Ancak bunlar formüllerden ziyade; rüyalar, bitkiler, şeytan, tanrı ve kozmosun yapısı üzerine karmaşık metinlerdi. Grothendieck bize şu soruyu sordurtur: "Bir şeyi o kadar derinlemesine anlamak, gerçeklikle bağımızı koparır mı?" (Benzer bir hayat öyküsü ile John Nash de akla geliyor. Ancak, Nash'in Grothendieck'ten farkı, zihinsel karmaşasını ve hastalığını yenip bütünüyle matematiğe geri dönmesidir.)

Kitabın İngilizce çevirisine adını veren ve kurgu düzeyinin en yüksek olduğu bölüm ise Dünyayı Anlamayı Bıraktığımızda'dır. Heisenberg ve Schrödinger'in hikâyesinin anlatıldığı bu bölüm kitabın ana temasının dayanak noktasıdır. Kuantum mekaniğinden önce fizikçiler (Newton, Einstein, hatta Schrödinger) dünyayı "göz önüne getirebiliyorlardı". Gezegenler dönüyor, dalgalar yayılıyor, elma düşüyordu. Zihnimizde bunun bir resmi vardı. Heisenberg, Helgoland adasında kurduğu Matris Mekaniği ile şunu demiş oldu: "Atomun içinde ne olduğunu hayal etmeye çalışmayı bırakın. Elektronun yörüngesi diye bir şey yoktur. Sadece elimizdeki sayılara (girdi ve çıktılara) bakalım." Heisenberg, atom altı dünyasını resmedilemez, canlandırılmaz ve klasik mantıkla anlaşılamaz bir matematik yığınına dönüştürdü. Schrödinger buna, "Senin bu matematiğinden tiksiniyorum!" diyerek karşı çıktı. O, atomun tıpkı bir gitar teli gibi titreşen "dalgalardan" oluştuğunu savundu (Dalga Denklemi). Çünkü insan zihni dalgaları hayal edebilir, resmedebilir. Schrödinger, anlaşılabilir bir evren istiyordu. Labatut kitapta bu savaşı Heisenberg'in kazandığını (veya en azından gerçeğin Heisenberg'in tarafına daha yakın olduğunu) ima eder. Bohr ve Heisenberg'in Kopenhag Yorumu ile şu sonuca varıldı: Biz artık bir elektronun "ne yaptığını" veya "nerede olduğunu" kesin olarak bilemeyiz (anlayamayız). Sadece nerede olabileceğini olasılık hesaplarıyla tahmin edebiliriz. İşte bu bölümün başlığı buradan gelir: İnsanlık, evrenin temel taşlarını (atomları) görselleştirmeyi ve neden-sonuç ilişkisi içinde "anlamayı" bırakmış; sadece formüllerle "hesaplamaya" başlamıştır. Yazarın "İşte burada ip koptu, burada karanlığa girdik" dediği o büyük kırılma anı, Heisenberg'in o adada geçirdiği gecedir. Benjamin Labatut, Heisenberg'in Helgoland adasındaki o gecesini adeta bir korku filmi sahnesi gibi tasvir eder. Bu, bilimsel bir keşiften çok, bir tür "şeytan çıkarma" ayinine benzer. Helgoland adası, kitapta neredeyse başka bir gezegen gibi anlatılır. Heisenberg geceleri uyuyamaz. Geçirmekte olduğu ağır bir saman nezlesinin ağırları ve beynindeki formüller onu uyanık tutar. Geceleri uçurumun kenarında yürür, Goethe'nin şiirlerini ezberinden haykırır ve denizin karanlığına bakar. Labatut'un anlatımının zirve yaptığı yer, Heisenberg'in zihinsel kırılma anıdır. Heisenberg o gece, Bohr'un yörüngelerini, dönen elektronları, yani kafasında kurduğu o "minyatür güneş sistemi" modelini zihninden silip atar.

O meşhur gece (tarihsel olarak 7 Haziran 1925 sabaha karşı), Heisenberg bir trans halindedir. Sayıları

matrislere döker. Enerjinin korunduğunu gördüğünde dehşete kapılır. Labatut, Heisenberg'in o an hissettiği şeyi "evrenin derisinin yüzüldüğü an" olarak tarif eder. Heisenberg, doğanın o güzel, anlaşılır yüzeyinin altına bakmış ve orada dönen dişlileri, o soğuk ve karanlık iskeleti görmüştür. Hissettiği şey sevinç değil, derin bir korkudur. Sanki insanlığın görmemesi gereken bir sırrı ifşa etmiş gibi hisseder. Gün doğarken bir kayanın tepesine tırmanır ve orada titreyerek oturur. Yazar burada Heisenberg'i, yasak elmayı ısırarak Adem gibi konumlandırır. Heisenberg, "anlamın" (görselliğin) konforunu feda etmiş, karşılığında "gerçeğin" (matematiğin) soğuk gücünü elde etmiştir. Bu sahne, kitabın başlığı olan "Dünyayı Anlamayı Bıraktığımızda" fikrinin tam olarak vücut bulduğu andır.

Benjamin Labatut, Heisenberg'in çektiği "çile"nin tam aksine, Erwin Schrödinger'in keşif sürecini bir "vecd" hali ve bir aşk sarhoşluğu olarak anlatır. Tarih 1925 yılının sonlarıdır. Schrödinger, karısını evde bırakıp İsviçre Alpleri'ndeki lüks bir kayak merkezi ve sanatoryum olan Arosa'ya gider. Görünürde tüberkülozdan şüphelendiği için dinlenmek amacıyla gitmek, ama asıl niyeti, Heisenberg'in o "çirkin" matrislerini çürütecek, evreni yeniden "pürüzsüz" hale getirecek bir teori kurmaktır. Schrödinger yalnız değildir. Yanında, tarihçilerin kimliğini asla tam olarak çözemediği, günlüklerinde sadece "Heroldswil"li bir bayan" olarak geçen eski bir sevgilisi vardır. Labatut bu kadını, Schrödinger'in ilham perisi olarak kurgular. Schrödinger'in en büyük motivasyonu Heisenberg'e duyduğu nefretti. Heisenberg'in dünyasında elektronlar bir yörüngeden diğerine aniden, sihir gibi "sıçırıyordu" (Kuantum Sıçraması). Arada geçen zaman veya gidilen yol yoktu. Schrödinger bunu "iğrenç" buluyordu. Doğada sıçrama olamazdı; doğa sürekli. Bu düşüncelerle, o meşhur Dalga Denklemi'ni kurdu. Ona göre elektron bir parçacık değil, çekirdeğin etrafında titreşen bir dalga bulutuydu. Tıpkı bir gitar telinin titreşimi gibi yumuşak, müzikal ve öngörülebilir bir hareketti. Schrödinger dağdan indiğinde elinde fizik dünyasının en güzel denklemi vardı.

Ancak Labatut kitabın sonunda acı gerçeği yüzümüze vurur: Schrödinger haklı olduğunu sanıyordu ama aslında yanılmıştı. Matematiksel olarak denklemi doğruydum ama yorumu yanlış. Elektronlar "gerçekten" dalga değildi; onlar olasılık dalgalarıydı. Yani Schrödinger, evreni kurtarmaya (onu tekrar anlaşılır kılmaya) çalışırken, istemeden de olsa Heisenberg'in o "anlaşılamaz" belirsizliğini daha da sağlamlaştırmıştı.

Ve Sonsöz: Gece Bahçıvanı.

Kitabın sonundaki anlatıcı ve "Gece Bahçıvanı" karakteri, yazarın Güney Amerika'daki kendi yaşamından esinlenmiş olsa da, büyük ölçüde metaforik ve kurgusaldır. Bu bölüm, kitabın ana teması olan "bilimin doğayı hem iyileştirip (bahçıvanlık) hem de zehirlemesi (siyanür)" fikrini özetleyen bir final hikâyesidir. Labatut, "tarihi çarpıtmak" için değil, bilimsel keşfin arkasındaki duygusal ve zihinsel maliyeti (korku, vecd, delilik) hissettirmek için boşlukları kurguyla doldurmuş ve edebiyatta yeni bir türe ışık yakmıştır.

Ek Okuma Önerisi: Maniac, Benjamin Labatut, Can Yayınları, Nisan 2025 (John von Neumann'ın yaşam öyküsünü eksene alarak bir kurgusal roman kaleme alan Labatut'un bu kitabını da okumanızı şiddetle öneririm.)

■ Kaosun İçindeki Melodi: Asal Sayılar ve Riemann’ın Gizemi

Asal Sayıların Müziği – Marcus du Sautoy (Çev. Avni Uysal), Ginko Bilim (2023)



Marcus du Sautoy’un “Asal Sayıların Müziği” adlı eseri, matematiğin en büyük çözülmemiş gizemlerinden biri olan Riemann Hipotezi’nin tarihini, önemini ve bu problemi çözmeye çalışan dâhilerin hikayelerini anlatan sürükleyici bir popüler bilim kitabıdır.

Kitabın kalbinde Alman matematikçi Bernhard Riemann ve onun 1859’da yayımladığı 10 sayfalık makale yer alır. Riemann, asal sayıların dağılımını anlamak için sayı doğrusundan çıkıp, çok boyutlu hayali bir manzaraya (Zeta Fonksiyonu) bakmamız gerektiğini keşfeder. Riemann, asal sayıların dağılımı ile ses dalgalarının analizi arasında bir bağlantı kurar. Asal sayıların görünüşteki rastgeleliğinin arkasında, belirli frekanslardaki dalgaların (notaların) birleşimi yatmaktadır. Riemann, bu hayali manzaradaki tüm “sıfır noktalarının” (müziğin uyumlu olduğu yerlerin) tek bir kritik doğru üzerinde hizalandığını iddia eder. Eğer bu doğrudur, asal sayıların dağılımında mükemmel bir armoni vardır. Du Sautoy, bu hipotezi kanıtlamaya (veya çürütmeye) çalışan matematikçilerin kişisel ve akademik hayatlarını bir roman tadında anlatır.

Kitap, bu problemin sadece teorik bir merak olmadığını vurgular. Bugün kredi kartı şifrelerimizden devlet sırlarına kadar her şey, asal sayıların çarpanlarına ayrılmasının zorluğuna (RSA şifreleme) dayanır. Riemann Hipotezi’nin kanıtlanması (veya asal sayıların yapısının tam olarak anlaşılması), modern şifreleme sistemlerini savunmasız bırakabilir. Marcus du Sautoy, kitabın sonlarına doğru, asal sayıların dağılımı ile ağır atom çekirdeklerinin enerji seviyeleri arasındaki ürkütücü benzerliğe de değinir. Bu, matematiğin ve fiziğin evrenin temelinde birleştiğine dair büyük bir ipucudur.

Şimdi Marcus du Sautoy’un kitabında bahsettiği o “müziğin” teknik ama anlaşılır hikâyesine değinelim:

Her şey, Riemann’ın sayıları incelemek için kullandığı şu özel fonksiyonla başlar:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Buradaki kilit nokta s harfidir. Eğer s yerine sadece reel sayılar koyarsanız, sonuç sıradan bir toplam olur. Ancak Riemann, s yerine karmaşık sayılar koydu. Bunu yaptığınızda, fonksiyon artık düz bir çizgi değil, üç boyutlu, engebeli bir coğrafi haritaya dönüşür. Dağlar, vadiler ve deniz seviyesine inen noktalar oluşur. Riemann bu 3 boyutlu haritayı incelerken, fonksiyonun sonucunun tam olarak 0 olduğu yerleri, yani haritanın “deniz seviyesine” indiği noktaları aradı. Bu sıfır noktaları ikiye ayrılır. Aşikâr sıfırlar, -2, -4, -6 gibi negatif çift sayılarda çıkar. Bunların gizemi yoktur, matematikçiler bunlarla ilgilenmez. Asıl olay, aşikâr olmayan sıfırlardır. Riemann bu noktaların haritada rastgele dağılmadığını fark etti. Hepsini belli bir şerit üzerinde toplanıyordu.

Riemann, hesapladığı tüm bu gizemli sıfır noktalarının haritada çok özel bir boylam üzerinde hizalandığını gördü. Karmaşık sayıları bir koordinat sistemi gibi düşünürsek, Riemann, tüm bu önemli sıfırların yatay ekseninde tam olarak $1/2$ noktasından geçen dikey bir doğru üzerinde dizildiğini iddia etti. İşte Riemann Hipotezi budur: Zeta fonksiyonunun tüm aşikâr olmayan sıfırlarının reel kısmı $1/2$ ’dir. Yani, tüm o karmaşık sıfırlar $s = 1/2 + ib$ formundadır.

Buradaki en büyüleyici bağlantı şudur: Bu sıfır noktaları aslında birer ses frekansıdır. Eğer asal sayıların sayı doğrusundaki dağılımını bir müzik parçası veya ses dalgası olarak düşünürseniz, asal sayıların dağılımı ilk bakışta gürültülü ve düzensizdir. Ancak Riemann gösterdi ki, Zeta fonksiyonunun her bir sıfır noktası, bu gürültüyü düzelteren bir “müzik notasına” (sinüs dalgasına) karşılık gelir. Siz bu sıfırları (dalgaları) üst üste ekledikçe, asal sayıların tam olarak nerede olduğunu gösteren kusursuz grafik ortaya

çıkart.

Eğer Riemann haklıysa (yani tüm sıfırlar o $1/2$ doğrusu üzerindeyse), asal sayılar, evrenin izin verdiği ölçüde en dengeli ve adil şekilde dağılmıştır. Müzik uyumludur. Eğer Riemann haksızsa (yani o doğru dışında tek bir sıfır bile varsa), asal sayıların dağılımında büyük sapmalar, öngörülemez yığılmalar olabilir. Müzik bozuktur (kakofoni). Matematikçiler ilk 10 trilyon sıfır noktasını kontrol ettiler ve hepsi o doğrunun üzerindeydi. Ama sonsuza kadar böyle gidip gitmediğini henüz kimse kanıtlayamadı.

Kendisi de bir matematik profesörü olan Marcus du Sautoy'un konuyla ilgili hazırladığı youtube videosuna <https://www.youtube.com/watch?v=PgqEaUT8Qo0> bağlantısından erişebilirsiniz. Ayrıca, yazarın web sayfasına da göz atmanızı öneririz (bkz. <https://www.simonyi.ox.ac.uk/>)

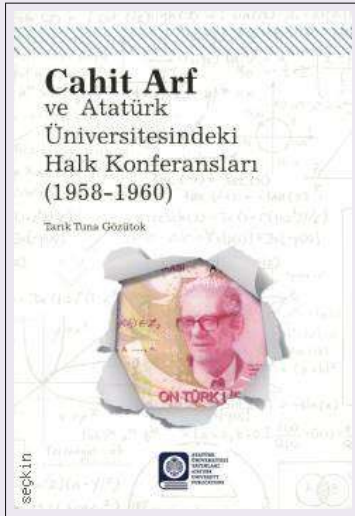
Ek Okuma Önerisi:

- 1) Yalnızca Sayıları Seven Adam, Paul Hoffman, Nika Yayınları, 2021.
- 2) Yaratıcı Kod, Marcus du Sautoy, Ginko Bilim, 2023.

Film Önerisi: Traveling Salesman, 2012. (<https://travelingsalesmanmovie.com>)

■ Cahit Arf ve Atatürk Üniversitesi'ndeki Halk Konferansları

Cahit Arf ve Atatürk Üniversitesindeki Halk Konferansları – Tarık Tuna Gözütok, Atatürk Üniversitesi Yayınları (2021)



Son dört beş senedir ve yapay zekânın yaşamımıza yerleşmeye başlamasıyla birlikte daha da sık olarak sosyal medya platformlarında şöyle bir paylaşım görüyorum: Eski bir kitap ya da kitapçık kapağı ve üstünde şu yazıyor: Ord. Prof. Dr. Cahit Arf, Makine düşünebilir mi ve nasıl düşünebilir? Bu kitap(çık), Atatürk Üniversitesi'nin 1958-1959 Öğretim Yılı'nda düzenlediği Halk Konferansları vesilesiyle Cahit Arf'ın verdiği bir konuşmanın metni. Bu paylaşımı yapanlar Cahit Arf'ın o yıllarda yapay zekânın adımlarını öngördüğünü söyleyerek ünlü matematikçimizi saygıyla anıyorlar.

İşin gerçeği şu ki keşke Cahit Arf'ı andığımız kadar bir de anlayabilsek. Cahit Arf hakkında yazılmış pek çok kitap var. Bunların bir kısmı çocuk kitabı. Çocuklarımıza, gençlerimize bu büyük matematikçimizi anlatmak istiyoruz. Ne yazık ki bu kitapların çoğu, özellikle de daha özenli olması gereken çocuk kitapları Cahit Arf Hocamızı ve onun dünyasını anlatabilmekten çok uzak. (Hatta birkaç kitapta, Cahit Arf diye Paul Erdős'ün resmi konulmuş, bir kitapta da kapak resmi yapılmış!) “Ca-

hit Arf ve Atatürk Üniversitesindeki Halk Konferansları” ise “İşte bu!” diyebileceğim nadir Cahit Arf kitaplarından biri. En önemli özelliği ise Cahit Arf'ın kendi sesini de duyabiliyoruz bu kitapta, bir aracı olmadan, onun matematiğe ne bulduğunu ve matematikle ne anlatmak istediğini direkt olarak öğreniyoruz ve her şeyden önemlisi “anıyoruz” Cahit Arf'ı. Bu kitap, yukarıda sözünü ettiğim metinle beraber Cahit Arf'ın Atatürk Üniversitesi'nde 1958-1960 yılları arasında Halk Konferansları kapsamında verdiği üç konuşmanın metnini içeriyor. Bu çok kıymetli bir arşiv. Bu kitabı yayına hazırlayan Tarık Tuna Gözütok'a ve yayımlayan Atatürk Üniversitesi'ne teşekkürü bir borç bilirim.

Gözütok, kitabın açılış bölümünde, Cahit Arf'ın kısa hayat hikâyesini ve bilimsel yayınlarını veriyor. Birinci bölümde Cahit Arf'ın gözünden bilim ve teknolojiyi, o arada tabii ki matematiği anlamayı irdeliyor.

İkinci bölüm ise, 7 Haziran 1957 tarihinde Doğu Anadolu’da kurulan ilk üniversitemiz olma özelliğini taşıyan Atatürk Üniversitesi’nin kuruluş hikâyesi ile başlıyor. O dönemin koşulları ile doğuda bir üniversite kurma girişimlerinin aktarılması da ayrıca bir tarih değeri taşıyor bizim için. Halk Konferansları kapsamında sunulan konuşmaların bir listesini veren Gözütok, Cahit Arf’ın üç konuşmasını, matematiğe bakış açısını da irdelleyerek, titizlikle inceliyor. Aslında, Gözütok burada, sonraki bölümde verilecek olan Cahit Arf’ın konuşma metinlerinin içeriğinde asıl anlatılmak isteneni ifade etmeye çalışıyor. Bir anlamda, konuşma metinlerinin perde arkasını gösteren bir ön hazırlık.

Kitabın son bölümü ise Cahit Arf’ın sözünü ettiğimiz konferans metinlerine ayrılmış: Makine Düşünebilir mi ve Nasıl Düşünebilir?, Matematik Tedrisatında Yeni Temayüller, Öğrenciler İçin Genetikte Bir Seleksiyon Problemi Hakkında. Cahit Arf’ın bu konuşmalardaki en büyük amaçlarından biri matematiği “anlamanın” güç olmadığı ancak sabır gerektirdiğini herkese anlatmaya çalışmasıdır. Akla ve sağduyuya güvenmenin, hangi meslekte olursa olsun herkeste bulunması gerektiğini ve ancak bu sayede “öğrendiklerimize yenilerini katabileceğimizi” vurgulamak istemiştir. Körü körüne bellemek değil, “anlamak” gerektiğini anlatmaya çalışır bu konferanslarında. Kendi yaşamından ve matematik dünyasından örneklerle halka sunar bunu. Matematiğe duymuş olduğu ilginin esas kaynağının, doğayı modelleyerek anlama hırısından doğduğunu da matematik tarihi dersini verdiği zaman anladığını aktarır. Bu metinlerde, gerek matematik eğitimini gerek matematiği “anlamanın” yolunu Cahit Arf gibi büyük bir matematikçimizin değerli deneyimlerinden yola çıkarak irdeleme şansına sahip oluyoruz.

Ek Okuma Önerileri:

- 1) Özkan Değer, Cahit Arf’ın Atatürk Üniversitesi’ndeki (Erzurum) Halk Konferansları, Osmanlı Bilimi Araştırmaları, Cilt 23, Sayı 22, 2022. <https://iupress.istanbul.edu.tr/journal/oba/article/cahit-arfin-ataturk-universitesindeki-erzurum-halk-konferanslari>
- 2) Tosun Terzioğlu, Akın Yılmaz, Cahit Arf: Anlamak Tutkunu Bir Matematikçi, Tüba Yayınları, 2006.
- 3) Emir Öngüner, Halide ve Cahit Arf’ın Almanya Mektupları, Ötüken Yayınları, 2024.

Gauss Tamsayıları ve Cebirsel Tamsayı Halkaları

BÜLENT SARAÇ

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ bsarac@hacettepe.edu.tr



Önceki yazımızda antik Yunan matematikçilerinin çalışmalarına kadar uzanan tamsayılardaki çarpanlara ayırma özelliğinin başka halkalarca da sağlandığını gördük. Bu kapsamda, özel olarak, Gauss tamsayıları olarak bilinen karmaşık sayılar kümesinde, tıpkı tamsayılarda olduğu gibi, asal sayılar tanımlanabildiğini ve bu sayede çarpanlara ayırma özelliğini tartışabildiğimizi görmüştük. Bu yazımızda, daha önce söz verdiğimiz gibi, Gauss tamsayılarının bu güçlü özelliği sayesinde elde edebileceğimiz bazı sonuçlara ve bu sonuçların sayı teorisi açısından önemli olan ve "iki kare teoremi" olarak bilinen sonucu. Ayrıca gelecek yazımız için bir tür hazırlık olması bakımından bazı cebirsel tamsayı halkalarına da kısaca değinmek istiyoruz.

■ Gauss Tamsayıları ve İki Kare Teoremi

Hatırlayacak olursak, Gauss tamsayıları $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ kümesi, karmaşık sayılar kümesinin bir alt halkasıdır. Burada i , hayali birim denilen ve $i^2 = -1$ eşitliğini sağlayan sayıdır. Her halkada olduğu gibi Gauss tamsayıları halkasında da asal sayılar, sıfır veya birimsel (yani tersinir) olmayan ve kendisi ile birimsellerin çarpımı dışında başka bir şekilde çarpanlara ayıramayan elemanlar olarak tanımlanır. Örneğin $1 + i \in \mathbb{Z}[i]$ elemanı bir asal Gauss tamsayıdır. Çünkü $1 + i$ sayısını çarpanlara ayırmak istediğimizde, $1 + i = (a + bi)(c + di)$ şeklinde bir çarpanlara ayırma yapabilmemiz için $ac - bd = 1$ ve $ad + bc = 1$ denklemlerinin sağlanmaması gerekir. Bu denklemler ancak a, b, c, d tamsayıları için $a = \pm 1, b = 0, c = \pm 1, d = 0$ veya $a = 0, b = \pm 1, c = 0, d = \pm 1$ olduğunda sağlanabilir. Yani $1 + i$ sayısını $\mathbb{Z}[i]$ içinde çarpanlara ayırabilmek için çarpanlardan birinin birimsel olması gerekir. Fakat $2 \in \mathbb{Z}$ sayısı Gauss tamsayıları içinde asal değildir. Çünkü $2 = (1 + i)(1 - i)$ şeklinde bir çarpanlara ayırma mümkündür ve ne $1 + i$ ne de $1 - i$ birimsel değildir. Bu örnekler bize Gauss tamsayıları içinde asal sayıların dağılımının tamsayılar içindeki asal sayıların dağılımından farklı olduğunu gösterir. Ancak Gauss tamsayıları halkasında da tamsayılarda olduğu gibi her elemanın asal çarpanlara tek türlü ayrılabilirdiğini, yani Gauss tamsayıları halkasının da bir tek türlü çarpanlara ayırma halkası olduğunu biliyoruz.

$\mathbb{Z}[i]$ halkasında bir elemanın çarpanlarının (ya da denk olarak bölenlerinin) hangi tipte olduğunu veya bir Gauss tamsayısının birimsel olup olmadığını anlamak için norm fonksiyonunu adı verilen kullanışlı bir araçtan da yararlanabiliriz. Gauss tamsayıları için norm fonksiyonu $N(a + bi) = a^2 + b^2$ şeklinde tanımlanır. Buna göre her $z \in \mathbb{Z}[i]$ için $N(z) \in \mathbb{N}$ ve $N(z) = 0$ ise $z = 0$ olur. Ayrıca her $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ için $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$ eşitliği sağlanır. Norm fonksiyonunun bu çarpımsal özelliği sayesinde ilk olarak bir Gauss tamsayısının birimsel olup olmadığını anlayabiliriz.

Teorem 1.

Her $z \in \mathbb{Z}[i]$ için aşağıdakiler denktir:

- (1) z birimsel bir elemandır.
- (2) $N(z) = 1$.
- (3) $z = \pm 1$ veya $z = \pm i$.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2): z birimsel ise, z 'nin bir tersi vardır, yani $zz^{-1} = 1$. Norm fonksiyonunun çarpımsal özelliğinden dolayı $N(z)N(z^{-1}) = N(1) = 1$ olur. $N(z), N(z^{-1}) \geq 0$ olduğundan, $N(z) = 1$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3): $N(z) = 1$ ise, $z = a + bi$ için $a^2 + b^2 = 1$ olur. Bu durumda (a, b) ikilisi yalnızca $(\pm 1, 0)$ veya $(0, \pm 1)$ olabilir. Dolayısıyla $z = \pm 1$ veya $z = \pm i$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (1): $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot (-1) = 1$, $i \cdot (-i) = 1$ ve $(-i) \cdot i = 1$ olduğundan, $z = \pm 1$ veya $z = \pm i$ ise, z birimsel bir elemandır. $\square$

Yukarıdaki örnekte ele aldığımız $1 + i$ sayısının normu $N(1 + i) = 1^2 + 1^2 = 2$ 'dir. $1 + i = z_1 \cdot z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ elemanları varsa, $N(1 + i) = N(z_1)N(z_2)$ eşitliğinden $2 = N(z_1)N(z_2)$ olur. Buradan $N(z_1)$ ve $N(z_2)$ 'nin yalnızca 1 ve 2 değerlerini alabileceğini görürüz. Ancak $N(z) = 1$ ise $z = \pm 1$ veya $z = \pm i$, yani z birimsel bir elemandır. Dolayısıyla $1 + i$ sayısı asal bir Gauss tamsayıdır.

Teorem 2.

p bir asal tamsayı ise, aşağıdakilerden yalnızca biri doğrudur:

- (1) *p Gauss tamsayıları içinde de asaldır.*
- (2) *$p = 2$ 'dir ve $2 = (1 + i)(1 - i)$ şeklinde çarpanlara ayrılır.*
- (3) *$p \equiv 1 \pmod{4}$ ve $p = a^2 + b^2$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tamsayıları vardır, yani p **iki kare toplamı** olarak yazılabilir.*

Kanıt. p bir asal tamsayı olsun. Kabul edelim ki $p \neq 2$ olsun. Bu durumda $N(p) = p^2$ olur. Eğer p Gauss tamsayıları içinde asal ise, (1) maddesi doğrudur. Aksi halde, p Gauss tamsayıları içinde asal değildir. Bu durumda $p = z_1 z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ elemanları vardır ve ne z_1 ne de z_2 birimsel değildir. Dolayısıyla $N(z_1), N(z_2) > 1$ olur. Norm fonksiyonunun çarpımsal özelliğinden dolayı $N(p) = N(z_1)N(z_2)$ eşitliği sağlanır. Yani $p^2 = N(z_1)N(z_2)$ olur. Buradan $N(z_1)$ ve $N(z_2)$ 'nin yalnızca p değerini alabileceğini görürüz. O halde $N(z_1) = p$ ve $N(z_2) = p$ olur. Şimdi $z_1 = a + bi$ için $N(z_1) = a^2 + b^2 = p$ olur. Bu durumda $p = a^2 + b^2$ olacak şekilde tamsayılar a, b vardır. Şimdi p 'nin 4 ile bölümünden kalanı inceleyelim. a ve b tamsayılarının her biri ya çift ya da tek olabilir.

- Eğer a ve b ikisi de çift ise, o zaman $a = 2m$ ve $b = 2n$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ için yazılabilir. Bu durumda $p = a^2 + b^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4(m^2 + n^2)$ olur. Yani p sayısı 4'ün katı olur ki, bu da p 'nin asal sayı olduğu varsayımıyla çelişir.
- Eğer a ve b ikisi de tek ise, o zaman $a = 2m + 1$ ve $b = 2n + 1$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ için yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} p = a^2 + b^2 &= (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2 \end{aligned}$$

olur. Bu da p 'nin bir tek asal sayı olduğu varsayımıyla çelişir.

- Eğer a tek ve b çift ise, o zaman $a = 2m + 1$ ve $b = 2n$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ için yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} p = a^2 + b^2 &= (2m + 1)^2 + (2n)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 \\ &= 4(m^2 + m + n^2) + 1 \end{aligned}$$

olur. Yani p sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 olur.

- Eğer a çift ve b tek ise, o zaman da benzer şekilde p sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 olur.

Sonuç olarak, p sayısı asal ve $p \neq 2$ ise, $p \equiv 1 \pmod{4}$ olur ve $p = a^2 + b^2$ olacak şekilde a, b tamsayıları vardır. Eğer $p = 2$ ise, o zaman $2 = (1 + i)(1 - i)$ şeklinde çarpanlara ayrılır. Böylece teoremdaki üç durumdan

en birinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Ayrıca bu üç durumun ayrık olduğu da açıktır. Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki teorem, tamsayılardaki asal sayıların Gauss tamsayıları içindeki durumunu açıklamaktadır. Özellikle (3) maddesi, asal sayıların iki kare toplamı olarak ifade edilebilmesiyle ilgili önemli bir sonuçtur. Buna göre teoremin (1) maddesine uyan asal tamsayıları merak etmek doğaldır. Bunu aşağıdaki teorem ile açıklayabiliriz.

Teorem 3.

p bir asal tamsayı ise aşağıdakiler denktir:

- (1) p , Gauss tamsayıları içinde asaldır.
- (2) $p \equiv 3 \pmod{4}$.
- (3) p sayısı iki tamsayının karelerinin toplamı olarak ifade edilemez.

Kanıt. p bir asal tamsayı olsun. Eğer (1) maddesi doğru ise, o zaman $p = 2$ olamaz. Ayrıca, bu durumda, önceki teoremin (3) maddesi de doğru olamaz. Çünkü eğer $p = a^2 + b^2$ olacak şekilde a, b tamsayıları varsa, o zaman $p = (a + bi)(a - bi)$ olacağından p , Gauss tamsayıları içinde asal değildir. Öte yandan $p \equiv 0 \pmod{4}$ veya $p \equiv 2 \pmod{4}$ olamayacağı da açıktır. Dolayısıyla (1) maddesi doğru ise, (2) maddesi doğrudur.

Şimdi (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmesini gösterelim. $p = a^2 + b^2$ olacak şekilde a, b tamsayıları olsun. Teorem 2'nin kanıtında olduğu gibi incelenecek olursa

$$p \equiv \begin{cases} 0 & \pmod{4}, \text{ eğer } a, b \text{ ikisi de çift ise} \\ 2 & \pmod{4}, \text{ eğer } a, b \text{ ikisi de tek ise} \\ 1 & \pmod{4}, \text{ eğer } a \text{ tek, } b \text{ çift veya } a \text{ çift, } b \text{ tek ise} \end{cases}$$

durumları elde edilir. Buradan görülebileceği gibi, $p \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $p = a^2 + b^2$ olacak şekilde a, b tamsayıları bulunamaz.

(3) maddesi doğru ise Teorem 2'den dolayı (1) maddesi de doğrudur. Böylece teorem kanıtlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki iki teorem birlikte ele alındığında, bir asal tamsayının Gauss tamsayıları içinde asal olup olmadığını belirlemek için o asal tamsayının 4 ile bölümünden kalanına bakmamız yeterli olur. Eğer asal tamsayı $4k + 1$ şeklinde ise, o zaman o asal tamsayı Gauss tamsayıları içinde asal değildir ve iki kare toplamı olarak ifade edilebilir. Eğer asal tamsayı $4k + 3$ şeklinde ise, o zaman o asal tamsayı Gauss tamsayıları içinde asaldır ve iki kare toplamı olarak ifade edilemez. Ayrıca 2 sayısı da Gauss tamsayıları içinde asal değildir ve $2 = 1^2 + 1^2$ şeklinde iki kare toplamı olarak ifade edilebilir.

Teorem 4.

Bir asal Gauss tamsayısı aşağıdaki şekillerden birinde ifade edilebilir:

- (I) p bir asal tamsayı ve $p \equiv 3 \pmod{4}$ olmak üzere $\pm p$ ve $\pm ip$.
- (II) $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a^2 + b^2 = p$ asal sayı olmak üzere $a + bi$.

Kanıt. I. tipten Gauss sayılarının asallığı yukarıdaki teoremlerden açıktır. II. tipten bir Gauss tamsayısının asallığını da norm fonksiyonunun çarpımsallığını kullanarak kolayca görebiliriz.

Şimdi $z = a + ib$ bir asal Gauss tamsayısı olsun. Eğer $b = 0$ ise $z = a$ bir tamsayıdır ve bu tamsayı, birden farklı iki tamsayının çarpımına ayrılırsa Gauss tamsayıları içinde de ayrılır. Dolayısıyla $|a|$ bir asal tamsayıdır. $z = a$ bir asal Gauss tamsayısı olduğundan Teorem 3 gereğince $p \equiv 3 \pmod{4}$ olur. Öte yandan, $a = 0$ ise $z = ib$ olur ve benzer şekilde $|b|$ bir asal tamsayıdır ve bu durumda $|b| = p$ için $z = \pm ip$ ve $p \equiv 3 \pmod{4}$ olur. Böylece I. tipteki asal Gauss tamsayıları elde edilir.

Şimdi $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğunu varsayalım. $N(z)$ 'nin asal bir tamsayı olduğunu gösterelim. Eğer $N(z)$ asal değil ise, $N(z) = mn$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 < m, n < N(z)$ için yazılabilir. O zaman $a^2 + b^2 = mn$ olur. Kabulden dolayı $a + ib$ asal bir Gauss tamsayıdır. Ayrıca eğer $a - ib$ iki Gauss tamsayısının çarpımı olarak yazılabilirse, eşleniği olan $a + ib$ de bunların eşleniğinin çarpımı olarak yazılabilir. Dolayısıyla, $a - ib$ de bir asal Gauss tamsayıdır. Eğer m ve n asal Gauss tamsayıları ise $\mathbb{Z}[i]$ bir tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi olduğundan bu durum bir çelişki olur. O halde m veya n 'den en az biri asal Gauss tamsayı değildir. Diyelim ki m asal Gauss tamsayı değildir. O zaman $m = z_1 z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ ve ne z_1 ne de z_2 birimsel değildir. Fakat bu durumda da $(a + ib)(a - ib) = mn = z_1 z_2 n$ eşitliğinin sol tarafı iki asal Gauss tamsayısının çarpımı iken sağ tarafı en az üç asal Gauss tamsayısının çarpımı olur. Bu da $\mathbb{Z}[i]$ 'nin bir tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi olmasıyla çelişir. Böylece $N(z)$ bir asal tamsayıdır. O halde $N(z) = a^2 + b^2 = p$ olacak şekilde bir asal tamsayı p vardır. Böylece II. tipteki asal Gauss tamsayıları elde edilir. $\square$

Teorem 5.

p bir asal tamsayı ve a, b, c, d pozitif tamsayılar olmak üzere

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

olsun. O zaman ya $a = \pm c$ ve $b = \pm d$ ya da $a = \pm d$ ve $b = \pm c$ olur.

Kanıt. $(a + ib)(a - ib) = (c + id)(c - id)$ eşitliği $N(a \pm ib) = N(c \pm id) = p$ eşitliğini verir. Dolayısıyla Teorem 4 gereğince $a \pm ib$ ve $c \pm id$ asal Gauss tamsayılarıdır. $\mathbb{Z}[i]$ bir tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi olduğundan, $a + ib$ sayısı $c \pm id$ sayısının birimsel (yani ± 1 veya $\pm i$) katı olmak zorundadır. Bu durumda $a + ib, \pm(c \pm id), \pm i(c \pm id)$ tipindeki elemanlarından biridir. $a, b, c, d > 0$ kabul edildiğinden, $a + ib = c + id$ veya $a + ib = d + ic$ olur. Buradan istenen sonuç kolayca elde edilir. $\square$

Şimdi sadece asal tamsayıların değil, tüm tamsayılar için iki kare toplamı olarak ifade edilebilme durumunu belirleyeceğiz. Fakat öncesinde aşağıdaki lemmayı kanıtlayalım.

Önsav 1.

İki kare toplamı olan sayıların çarpımı da iki kare toplamı olarak yazılabilir.

Kanıt. $a^2 + b^2$ ve $c^2 + d^2$ iki kare toplamı için

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \end{aligned}$$

olacağından istenen sonuç elde edilir. $\square$

İki Kare Teoremi $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdakiler denktir:

- (1) $n = a^2 + b^2$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tamsayıları vardır.
- (2) n 'nin asal çarpanlarına ayrılışındaki p asalardan $p \equiv 3 \pmod{4}$ olacak şekilde olanların kuvvetleri çifttir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2): $n = a^2 + b^2$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tamsayıları olsun. O zaman $n = (a + ib)(a - ib)$ olur. $\mathbb{Z}[i]$ bir tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi olduğundan, $a + ib$ ve $a - ib$ Gauss tamsayıları içinde asal çarpanlara ayrılabilir. Teorem 4 gereğince $a + ib = p_1 \dots p_r z_1 \dots z_s$ ve $a - ib = p_1 \dots p_r \bar{z}_1 \dots \bar{z}_s$ olacak şekilde 4 ile bölündüğünde 3 kalanı veren p_i asal tamsayıları ile normu asal olan $z_1, \dots, z_m$ Gauss tamsayıları vardır. Bu durumda

$$n = (a + ib)(a - ib) = p_1^2 \dots p_r^2 N(z_1) \dots N(z_s)$$

ve her $i = 1, \dots, s$ için $N(z_i)$ bir asal tamsayı ve $N(z_i) \equiv 1 \pmod{4}$ olur. Buradan görülebileceği gibi, n 'nin asal çarpanlarına ayrılışında p_i asal tamsayılarının kuvvetleri çifttir.

(2) $\Rightarrow$ (1): $n \in \mathbb{N}$ için $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ şeklinde asal çarpanlara ayrıldığını varsayalım. Burada her p_i bir asal tamsayı ve her e_i bir pozitif tamsayıdır. Kabulden dolayı her p_i için aşağıdakilerden biri doğrudur:

- $p_i = 2$,
- $p_i \equiv 1 \pmod{4}$,
- $p_i \equiv 3 \pmod{4}$ ve e_i çift sayıdır.

Teorem 2, Teorem 3 ve Lemma 1 gereğince ilk iki durumda $p_i^{e_i}$ ifadesi iki kare toplamı olarak yazılabilir. $p_i \equiv 3 \pmod{4}$ ve $e_i = 2t$ çift tamsayısı ise, $p_i^{e_i} = (p_i^t)^2 + 0^2$ şeklinde iki kare toplamı olarak yazılabilir. Ayrıca iki kare toplamı olan sayıların çarpımı da iki kare toplamı olarak yazılabildiğinden, n de iki kare toplamı olarak yazılabilir. $\square$

Örnek 1.

$n = 2450$ sayısının iki kare toplamı olarak yazılıp yazılamayacağını belirleyelim. $2450 = 2^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ şeklinde asal çarpanlara ayrılır. Burada 2 ve 5 sayıları iki kare toplamı olarak yazılabilir. Ayrıca $7 \equiv 3 \pmod{4}$ ancak kuvveti çift olduğundan, Teorem 6 gereğince 2450 sayısı da iki kare toplamı olarak yazılabilir. 2450 sayısının iki kare toplamı şeklindeki yazımlarını bulmak için öncelikle bu sayıyı asal çarpanlarına ayıralım:

$$\begin{aligned} 2450 &= 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \\ &= (1+i)(1-i) \cdot (1+2i)^2(1-2i)^2 \cdot 7^2 \end{aligned}$$

Gauss tamsayılarında bu çarpanları çeşitli biçimlerde iki gruba ayırabiliriz öyle ki bir grup diğerinin eşleniğidir. İlk olarak,

$$2450 = [(1+i)(1+2i)^2 \cdot 7] \cdot [(1-i)(1-2i)^2 \cdot 7]$$

şeklinde yazarak, birinci çarpanı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (1+2i)^2 &= 1 + 4i - 4 = -3 + 4i \\ (1+i)(-3+4i) &= -3 + 4i - 3i - 4 = -7 + i \\ (-7+i) \cdot 7 &= -49 + 7i \end{aligned}$$

Buna göre $2450 = |-49 + 7i|^2 = 49^2 + 7^2 = 2401 + 49$ olur.

Alternatif olarak,

$$2450 = [(1+i)(1-2i) \cdot 7^2] \cdot [(1-i)(1+2i) \cdot 7^2]$$

şeklinde yazarsak:

$$\begin{aligned} (1+i)(1-2i) &= 1 - 2i + i + 2 = 3 - i \\ (3-i) \cdot 49 &= 147 - 49i \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $2450 = 147^2 + 49^2 = 21609 + 2401$ olur.

Bir başka gruplandırmada ise,

$$2450 = [(1+i)(1+2i)(1-2i) \cdot 7] \cdot [(1-i)(1+2i)(1-2i) \cdot 7]$$

yazabiliriz. Burada $(1+2i)(1-2i) = 1 + 4 = 5$ olduğundan:

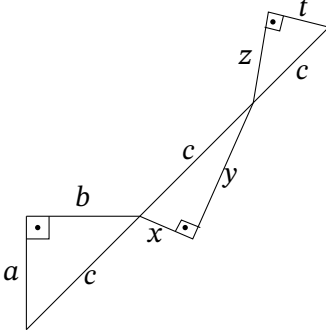
$$(1+i) \cdot 5 \cdot 7 = (5+5i) \cdot 7 = 35 + 35i$$

Bu durumda $2450 = 35^2 + 35^2 = 1225 + 1225$ olur.

Sonuç olarak $2450 = 7^2 + 49^2 = 49^2 + 7^2 = 35^2 + 35^2$ şeklinde farklı biçimlerde iki kare toplamı olarak yazılabilir.

Örnek 2.

Aşağıdaki düzlemsel şekilde a, b, c, x, y, z ve t birbirlerinden farklı birer pozitif tamsayı olmak üzere kenar uzunlukları bu sayılara eşit olan, hipotenüzleri eşit uzunlukta ve aynı doğru üzerinde üç adet dik üçgen gösterilmiştir.



Burada aradığımız, a, b, x, y, z ve t sayılarının toplamının en küçük değeridir. Üçgenlerin hipotenüz uzunlukları eşit ve c birim olduğundan Pisagor teoremine göre

$$c^2 = a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = z^2 + t^2$$

olur. Dolayısıyla karesi en az üç farklı biçimde iki (pozitif) kare toplamı olarak yazılabilen en küçük c sayısını aramakla başlayabiliriz. Tabii buradaki her yazımda toplam terimlerinin birbirinden farklı olması gerektiğini de unutmamalıyız. Bu ana sorunun çözümü için önce aşağıdaki sorulara yanıt arayarak biraz ısınalım.

İki pozitif kare toplamı olarak yazılabilen en küçük tamsayı nedir? Toplam terimleri farklı olıyorsa bu sayı ne olur? Bu sorunun yanıtını Teorem 6 gereğince $2 = 1^2 + 1^2$ olarak bulabiliriz. Buradaki toplam terimlerinin aynı olduğuna dikkat edelim. Buna göre toplam terimleri de farklı olup iki pozitif kare toplamı olarak yazılabilen en küçük tamsayı Teorem 4'ün de yardımıyla $5 = 1^2 + 2^2$ olarak bulunur.

İki pozitif kare toplamı olarak en az iki farklı biçimde yazılabilen en küçük tamsayı nedir? Bu sorunun yanıtını da Teorem 6 gereğince $50 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$ olarak bulabiliriz. Buradaki yazımların birinde toplam terimlerinin aynı olduğuna dikkat edelim. Buna göre toplam terimleri de farklı olup iki pozitif kare toplamı olarak en az iki farklı biçimde yazılabilen en küçük tamsayı Teorem 4'ün de yardımıyla $5 \times 13 = 65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$ olarak bulunur. Buradaki esas fikir sayının yazımında en az iki asal çarpan bulunmasını sağlamaktır. Bu asalları da 4 modülüne göre 1 kalanı veren asallardan seçmek akıllıca olur; aksi halde diğer asallar, ancak çift kuvvet ile yazılabilmesi ve iki (pozitif) kare toplamı olarak yazılamaması nedeniyle, sayıyı büyütmeekten başka bir işe yaramayacaktır. Buna göre $n = pq$ şeklinde bir sayı için p ve q asalları $4k + 1$ şeklinde ise, $p = z_1 \bar{z}_1$ ve $q = z_2 \bar{z}_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ bulunabilir. Böylece $n = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2)$ ve $n = (z_1 \bar{z}_2)(\bar{z}_1 z_2)$ şeklinde iki farklı biçimde yazılabilir. İki durumda da $n = z \bar{z}$ tipinde olacağından n sayısı iki kare toplamı olarak iki farklı şekilde yazılabilir.

Şimdi esas sorumuza geri dönelim. Üç pozitif kare toplamı olarak en az üç farklı biçimde yazılabilen ve tam kare olan en küçük tamsayıyı arıyoruz. Yukarıdaki düşünceleri kullanarak bu sayının $(5)^2$ olması gerektiğini söyleyebiliriz. Nitekim

$$(5 \cdot 13)^2 = (1 + 2i)^2(1 - 2i)^2(2 + 3i)^2(2 - 3i)^2$$

olduğundan bu sayıyı

$$[(1 + 2i)(2 + 3i)]^2[(1 - 2i)(2 - 3i)]^2 \quad (A)$$

$$[(1 + 2i)(2 - 3i)]^2[(1 - 2i)(2 + 3i)]^2 \quad (B)$$

$$[(1 + 2i)(1 - 2i)(2 + 3i)^2][(2 - 3i)^2(1 - 2i)(1 + 2i)] \quad (C)$$

$$[(2 + 3i)(2 - 3i)(1 + 2i)^2][(1 - 2i)^2(2 - 3i)(2 + 3i)] \quad (D)$$

Biçimlerinden biriyle ifade edebiliriz. (A) ifadesinden $65^2 = 33^2 + 56^2$, (B) ifadesinden $65^2 = 16^2 + 63^2$, (C) ifadesinden $65^2 = 25^2 + 60^2$ ve (D) ifadesinden $65^2 = 39^2 + 52^2$ yazımları elde edilir. Üstelik sadece üç değil dört farklı iki kare toplamı bulmuş oluruz. Buradan $c = 65$, $(a, b) = (33, 56)$, $(x, y) = (16, 63)$, $(z, t) = (25, 60)$ olarak alınabilir. Böylece aradığımız toplam en az $33 + 56 + 16 + 63 + 25 + 60 = 253$ olur.

■ Cebirsel Tamsayı Halkaları: Giriş

Gauss tamsayılarının sahip olduğu benzersiz özellikler – özellikle “Tek Türlü Çarpanlara Ayırma” (Unique Factorization Domain - UFD) ve Öklid Algoritması’nın uygulanabilirliği – bize aritmetiğin güvenli sularında yüzme imkanı vermişti. Ancak cesaret edip matematiğin derin sularına açıldığımızda, bu özelliklerin her zaman elimizin altında olmadığını görürüz. Gelecek yazılarımıza bir köprü olması adına, şimdi tamsayı kavramını biraz genişletelim ve bazı “iyi huylu” ve “kötü huylu” örneklerle göz atalım.

Cebirsel Tamsayı Nedir?

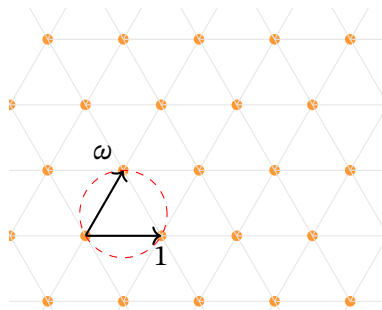
Gauss tamsayılarını tanımlarken katsayıların tamsayı olmasını yeterli görmüştük. Ancak daha genel bir tanım için “monik polinom” kavramına ihtiyacımız vardır. Bir α karmaşık sayısı, katsayıları tamsayı olan ve başkatsayısı 1 olan (monik) bir polinomun kökü ise, α ’ya bir Cebirsel Tamsayı denir. Örneğin i sayısı $x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökü olduğundan bir cebirsel tamsayıdır. Benzer şekilde $\sqrt{2}$ sayısı da $x^2 - 2 = 0$ denkleminin köküdür ve bir cebirsel tamsayıdır. Peki, rasyonel sayılar kümesindeki $1/2$ sayısı bir cebirsel tamsayı mıdır? $x = 1/2$ için en basit tamsayı katsayılı denklem $2x - 1 = 0$ ’dır. Ancak bu polinom monik değildir (çünkü başkatsayısı 2’dir). Bunu monik yapmak için 2’ye bölersek $x - 1/2 = 0$ elde ederiz ki bu sefer de katsayıların tümü tamsayı olmaz. Dolayısıyla $1/2$ bir cebirsel sayı olsa da, bir cebirsel tamsayı değildir. Bu ayırım, yapısal olarak tamsayı kavramını genişletirken, bazı önemli özelliklerin korunmasını sağlar.

İyi Huylu Örnekler: Eisenstein ve Altın Oran

Gauss tamsayılarının yaşadığı evrende yalnız olmadığını göstermek için iki güzel örneğimiz var. Bu halkalar da $\mathbb{Z}[i]$ gibi Tek Türlü Çarpanlara Ayırma Bölgesi (UFD) özelliğine sahiptir.

1. Eisenstein Tamsayıları ($\mathbb{Z}[\omega]$): Birimin küp kökü olan $\omega = e^{i2\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ sayısını ele alalım. ω , $x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin köküdür, dolayısıyla bir cebirsel tamsayıdır. $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ kümesi, karmaşık düzlemde kareler yerine eşkenar üçgenlerden oluşan bir kafes (lattice) oluşturur.

$\mathbb{Z}[\omega]$: Üçgen Kafes



Gauss tamsayıları için oldukça kullanışlı olan norm fonksiyonu burada $N(a + b\omega) = a^2 - ab + b^2$ şeklinde tanımlanır. Geometrik olarak $\mathbb{Z}[\omega]$, düzlemi $\mathbb{Z}[i]$ ’den daha sıkı paketler. Herhangi bir karmaşık sayının en yakın kafes noktasına olan uzaklığı $\mathbb{Z}[i]$ ’de maksimum $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ iken, $\mathbb{Z}[\omega]$ ’da bu mesafe $1/\sqrt{3} \approx 0.577$ ’dir. Bu “yakınlık”, bölme algoritmasının (kalanlı bölme) burada da kusursuz çalışmasını sağlar. Sonuç olarak Eisenstein tamsayıları da bir tek türlü çarpanlara ayırma bölgesidir.

2. Altın Oran Halkası ($\mathbb{Z}[\phi]$): $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ halkasına baktığımızda, burada “eksik” bir şeyler olduğunu görürüz. Çünkü Altın Oran sayısı olan $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x^2 - x - 1 = 0$ monik polinomunun köküdür ve dolayısıyla bir cebirsel tamsayıdır, fakat $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ içinde değildir. Bu nedenle, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin “asıl” tamsayılar halkası $\mathbb{Z}[\phi] = \{a + b\phi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ kümesidir ve bu halka da bir tek türlü çarpanlara ayırma bölgesidir.

Kaos: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Her şeyin $\mathbb{Z}[i]$ veya $\mathbb{Z}[\omega]$ gibi mükemmel işlediği yanılgısına düşmemek gerektiğini, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ halkasının bir tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi olmadığına önceki yazımızda değinmiştik. Şimdi bu halkaya biraz daha yakından bakalım.

Norm fonksiyonumuz $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ olsun. 6 sayısını iki farklı şekilde çarpanlarına ayıralım:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$$

Çarpanlar daha fazla parçalanabiliyor mu diye bakalım. Bunu normları kontrol ederek yapabiliriz:

- $N(2) = 4$. Eğer $2 = xy$ olsaydı, $N(x)N(y) = 4$ olurdu. $N(x) = 2$ olmalı (aksi halde x birimsel olur). Ancak $a^2 + 5b^2 = 2$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur. Demek ki 2, indirgenemez (irreducible) bir elemandır.
- Benzer şekilde $N(3) = 9$ ve normu 3 olan bir eleman olmadığından 3 de indirgenemezdir.
- $N(1 \pm \sqrt{-5}) = 1^2 + 5(1)^2 = 6$. Normu 2 veya 3 olan eleman olmadığı için bunlar da indirgenemezdir.

Elimizde 6 sayısının iki tamamen farklı (birbirinin birimsel katı olmayan) indirgenemez çarpanlara ayrılışı var. Bu durum, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ halkasında Tek Türlü Çarpanlara Ayırma özelliğinin bozulduğunu gösterir. Daha da ilginç, bu halkada “Asal” ve “İndirgenemez” kavramları ayrışır. Tamsayılarda alıştığımız üzere p bir çarpımı bölüyorsa ($p|ab$), çarpanlardan en az birini bölmelidir ($p|a$ veya $p|b$). Buna asallık özelliği denir. Ancak $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ’te 2 sayısı, $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6$ çarpımını böldüğü halde, ne $(1 + \sqrt{-5})$ ’i ne de $(1 - \sqrt{-5})$ ’i bölemez. Dolayısıyla 2 sayısı bu halkada indirgenemezdir ama asal değildir. İşte bu aritmetik “kaos”, 19. yüzyılda Kummer ve Dedekind gibi matematikçileri “İdeal Sayılar” teorisini geliştirmeye iten temel motivasyon olmuştur. Gelecek yazımızda, bu kaosu çözmek için sayıların kendisi yerine, sayı kümeleri olan “İdealler” ile nasıl çalışacağımızı ve tek türlü çarpanlara ayırma özelliğini idealler dünyasında nasıl geri kazanacağımızı inceleyeceğiz.

■ Kaynaklar

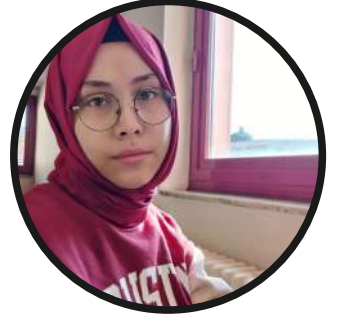
- [1] Stewart, I. and Tall, D. *Algebraic Number Theory and Fermat’s Last Theorem*. 4th ed., CRC Press, 2015.
- [2] Dummit, D. S. and Foote, R. M. *Abstract Algebra*. 3rd ed., Wiley, 2004.
- [3] Ireland, K. and Rosen, M. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. 2nd ed., Springer, 1990.
- [4] Edwards, H. M. *Fermat’s Last Theorem: A Genetic Introduction*. Springer, 1977.
- [5] Stillwell, J. *Elements of Number Theory*. Springer, 2010.
- [6] Conrad, K. *The Gaussian Integers*. (Erişim: Online Ders Notları).

Fraktal Geometri Üzerine Bir İnceleme

KÜBRA ÇELİK

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü 3. Sınıf Öğrencisi

✉ k.celik@hacettepe.edu.tr



Yüzyıllardır matematiğin temelini oluşturan Öklid geometrisi; daire, küre ve kare gibi ideal şekiller üzerine kuruludur. Ancak bu kusursuz yapılar, doğanın karmaşık biçimlerini açıklamakta yetersiz kalır. Benoît Mandelbrot'un ünlü sözleriyle ifade edecek olursak: "Bulutlar küre, dağlar koni, kıyı şeritleri çember ve ağaç kabukları düz değildir; hatta ışık bile düz bir çizgide hareket etmez."

Gerçek dünyada karşılaştığımız pek çok yapı, parçalı ve ayrıntılı bir yapıya sahiptir. Bu tür şekilleri anlamak ve modellemek amacıyla geliştirilen yaklaşım Fraktal Geometri olarak adlandırılır.

Fraktal kelimesi, Latince "kırılmış" ya da "parçalanmış" anlamına gelen *fractus* sözcüğünden türetilmiştir. Matematiksel olarak fraktallar; farklı ölçeklerde benzer desenlerden oluşan (öz-benzerlik/self similarity), sonsuz ayrıntı içeren ve çoğu zaman tam sayı olmayan, yani kesirli boyutlarla tanımlanan geometrik yapılardır. Basit kuralların art arda tekrar edilmesiyle karmaşık şekillerin ortaya çıkması, fraktalların dikkat çekici özelliklerinden biridir.

Fraktal geometri modern anlamda 1970'li yıllarda Benoît Mandelbrot tarafından sistematik hâle getirilmiştir. Ancak George Cantor, Helge von Koch ve Waclaw Sierpiński gibi matematikçilerin yaptığı çalışmalarla 19. yüzyılda temelleri atılmıştır. Bu çalışmalar matematikçiler tarafından uzun süre alışılmadık, hatta "matematiksel canavarlar" olarak adlandırılmıştır. Mandelbrot ise bilgisayarların sunduğu görselleştirme imkânlarını kullanarak bu dağınık fikirleri bir araya getirmiş, bu yapılara "fraktal" adını vermiş ve fraktal geometriyi bağımsız bir araştırma alanı hâline dönüştürmüştür.

Şimdi birkaç fraktal örneğini inceleyelim.

■ Koch Kar Tanesi: Sonsuz Çevre, Sonlu Alan

Koch kar tanesi; İsveçli matematikçi Helge von Koch'un tanımladığı, fraktal geometrinin en klasik örneklerinden biridir. Bu yapı; alanı sonlu ancak çevresi sonsuz olan, birçok üçgenin kar tanesi formunda üst üste dizilmesiyle oluşan bir şekildir. Eşkenar bir üçgenin sürekli olarak uç kısımlarının, simetrik şekilde katlanmasıyla elde edilen şekil kar tanesini andırıldığından bu adı almıştır.

Şimdi Koch Kar Tanesinin adımlarını inceleyelim. Bir eşkenar üçgen alalım ve bu eşkenar üçgene temel kuralı uygulayalım.

Temel Kural:

1. Üçgenin her bir kenarı alınır. Bu kenarlar, üç eşit parçaya bölünür.
2. Orta parça taban kabul edilerek, dışa doğru bakan yeni bir eşkenar üçgen inşa edilir.
3. Ardından, bu orta parça (başlangıçtaki kenarların $1/3$ 'ü) silinir.

Tekrarlama:

Bu süreç, elde edilen yeni şeklin her bir doğru parçasına sonsuza kadar uygulanır.

Sonsuz Çevre:

Her bir adımda, şeklin çevre uzunluğu sabit olarak $\frac{4}{3}$ oranında artar. Eğer başlangıç çevresi P_0 ise, k . adımdaki çevre uzunluğu P_k formülü ile gösterilir:

$$P_k = P_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

Bu üssel artış, sonsuz sayıda adım için uygulandığında ($k \rightarrow \infty$) kar tanesinin uzunluğunun da sonsuza (∞) yaklaşması anlamına gelir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \infty$$

Sonlu Alan

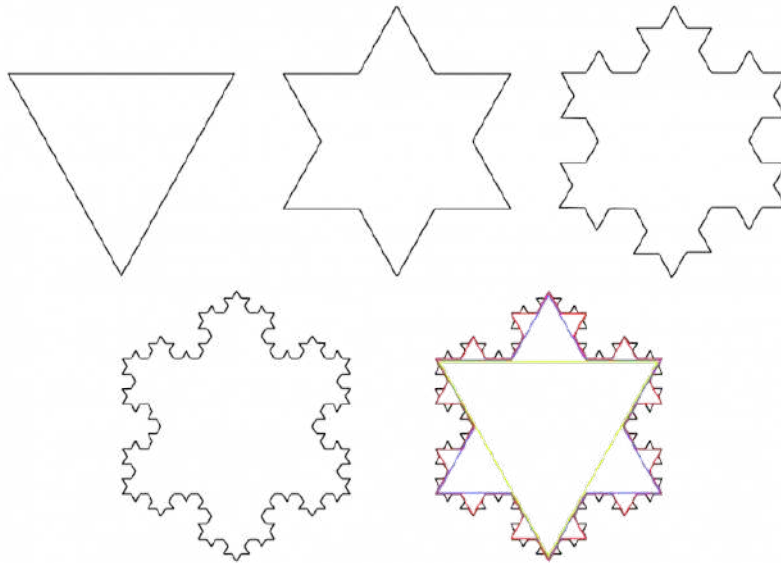
Toplam alan, başlangıç alanına sonsuza kadar eklenen küçük alanların toplamına eşittir. Bu toplam, bir geometrik seri oluşturur:

$$A_\infty = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Delta A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Serinin toplamını hesaplamak için ΔA_n ifadesini kullanırız. Bu, ilk terimi $a = A_0 \cdot \frac{1}{3}$ ve ortak oranı $r = \frac{4}{9}$ olan bir geometrik seridir. Toplamı $\sum = \frac{a}{1-r}$ formülü ile bulunur: **Toplam Alan:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta A_n = \frac{A_0 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{A_0 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = A_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = A_0 \cdot \frac{3}{5}$$

$$A_\infty = A_0 + A_0 \cdot \frac{3}{5} = A_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = A_0 \cdot \frac{8}{5}$$



■ Sierpinski Üçgeni:

Polonyalı matematikçi Wacław Sierpinski, daha sonraları kendi adıyla anılan Sierpinski Üçgeni fraktalını tanımladı. Sierpinski Üçgeni, içi dolu bir eşkenar üçgenin her adımda kendi içinden daha küçük boyutlu eşkenar üçgenlerin çıkarılmasıyla oluşur.

Temel Kural:

1. İçi dolu bir eşkenar üçgeni alınır.
2. Üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek bir üçgen oluşturulur ve ilk üçgenin içinden bu üçgen çıkarılır.

Artık elimizde kenar uzunluğu ilk eşkenar üçgenin kenarının yarı uzunluğunda 3 adet eşkenar üçgen kalmıştır.

Tekrarlama:

Bu işlem, kalan her yeni küçük üçgen için sonsuza kadar uygulanır.

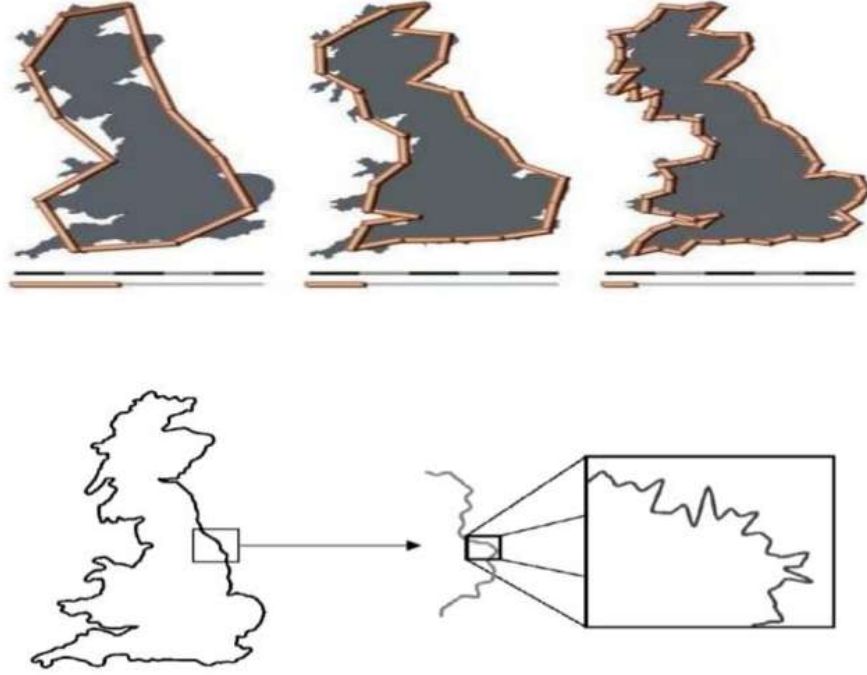
Bu fraktal örneğindeki en dikkat çekici sonuç, temel kuralın sonsuz kez tekrarlanması durumunda alanın sıfıra yaklaşmasıdır. Her adımda alanın $1/4$ 'ü atıldığı için, k -ıncı adımda kalan alan $A_k = (\frac{3}{4})^k$ formülüyle hesaplanır. Adım sayısı sonsuza yaklaştıkça ($k \rightarrow \infty$) üçgenin alanı matematiksel olarak sıfıra yaklaşır.



■ Fraktal Boyut:

Klasik Öklid geometrisinde boyutlar tam sayılarla ifade edilir: Nokta 0, doğru 1, düzlem 2 ve küp 3 boyutludur. Ancak Felix Hausdorff ve Abram Besicovitch tam sayı olmayan boyutları öne sürerek matematikte devrim yaratmışlardır. Bu önerme; doğruların bir, karelerin iki boyutlu olduğunu kabul ederken, birçok karmaşık eğrinin içerdikleri bilgi miktarına göre değişen "ara" boyutlara (in-between dimensions) sahip olduğunu kanıtlamıştır. Bu tarz, tam sayı olmayan boyutlara günümüzde Hausdorff-Besicovitch boyutları denir.

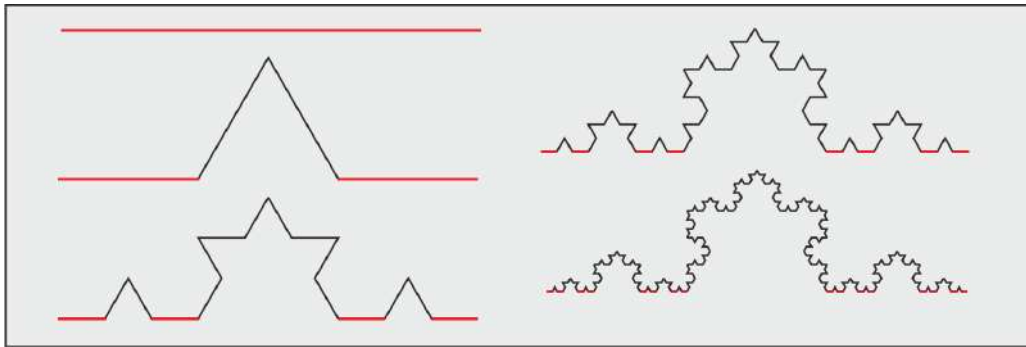
Mandelbrot, bu "ara boyut" tanımını kullanarak doğadaki düzensizlikleri araştırmış ve boyutla ilgili ilk çalışması İngiltere kıyılarının uzunluğunu merak etmesiyle başlamıştır. Bu çalışmalar sonucunda fraktal boyutu tanımlamıştır.



Boyutun Matematiksel Hesaplaması:

- Bir doğru parçasını 3 kat büyütürsek boyu 3 kat uzar, boyutu 1'dir.
- Bir kareyi 3 kat büyütürsek alanı 9 kat artar, boyutu 2'dir.
- Bir küpü 3 kat büyütürsek hacmi 27 kat artar, boyutu 3'tür.

Ancak fraktal bir yapıda durum farklıdır. Koch kar tanesinin oluşumunda kullanılan kural, yalnızca tek bir doğru parçasına uygulandığında ortaya çıkan fraktal yapıya Koch eğrisi adı verilir:



Koch eğrisinde bu durumu incelersek, iki nokta arasında sonsuz uzunlukta olmasıyla bir doğrunun ötesine taşarken, bir düzlemi tam olarak dolduramamaktadır. Bu nedenle boyutu 1 ile 2 arasında bir "ara değer" olmalıdır.

Mandelbrot'un tanımına göre fraktal boyut (D), ölçekleme çarpanı (s) ve oluşan yeni parça sayısı (N) arasındaki logaritmik ilişkidir:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(s)}$$

Koch Eğrisi Uygulaması

Koch eğrisinde ölçeği 3 kat büyüttüğümüzde ($s = 3$), yapı kendisini 4 yeni parça ($N = 4$) ile yineler.

$$4 = 3^D \Rightarrow D = \log_3(4) = \frac{\log(4)}{\log(3)}$$

Bu hesaplamanın sonucu olan $D \approx 1,262$, yapının bir çizgiden daha karmaşık ama bir yüzeyden daha az yoğun olduğunu matematiksel olarak göstermektedir.

Sierpinski Üçgeni Uygulaması

Sierpinski üçgeninde ölçekleme çarpanı 2 iken ($s = 2$), ortaya çıkan parça sayısı 3'tür ($N = 3$).

$$3 = 2^D \Rightarrow D = \frac{\log(3)}{\log(2)}$$

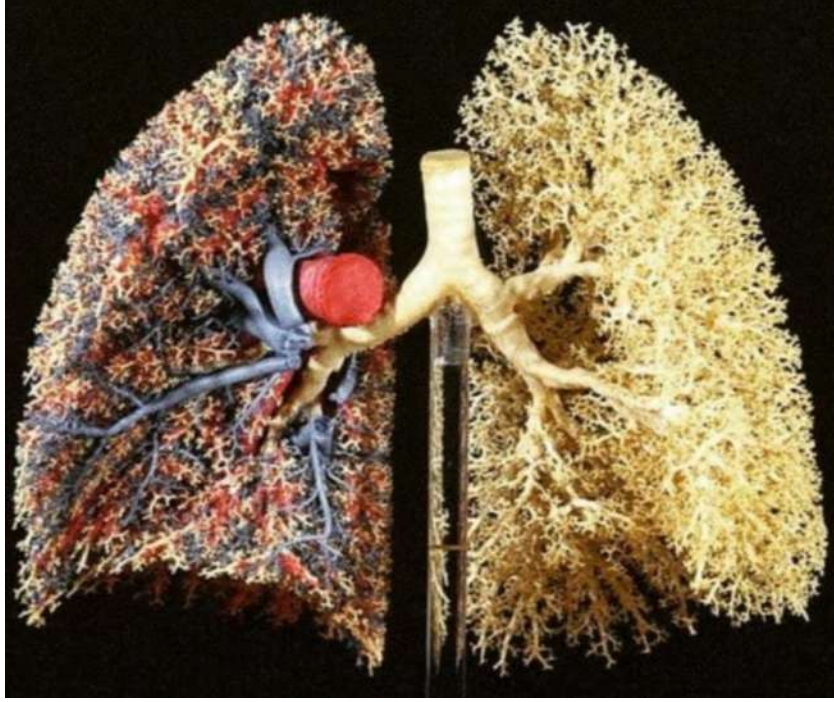
Bu hesaplamanın sonucu olan $D \approx 1,585$, Sierpinski Üçgeni'nin bir çizgiden ($D = 1$) çok daha yoğun olduğunu ancak bir düzlemi ($D = 2$) tamamen dolduramadığını gösterir. Bu "ara boyut", yapının sonsuz çevre uzunluğuna sahip olmasına rağmen alanının sıfıra yaklaşmasının matematiksel ifadesidir.

■ Doğadaki Uygulamaları:

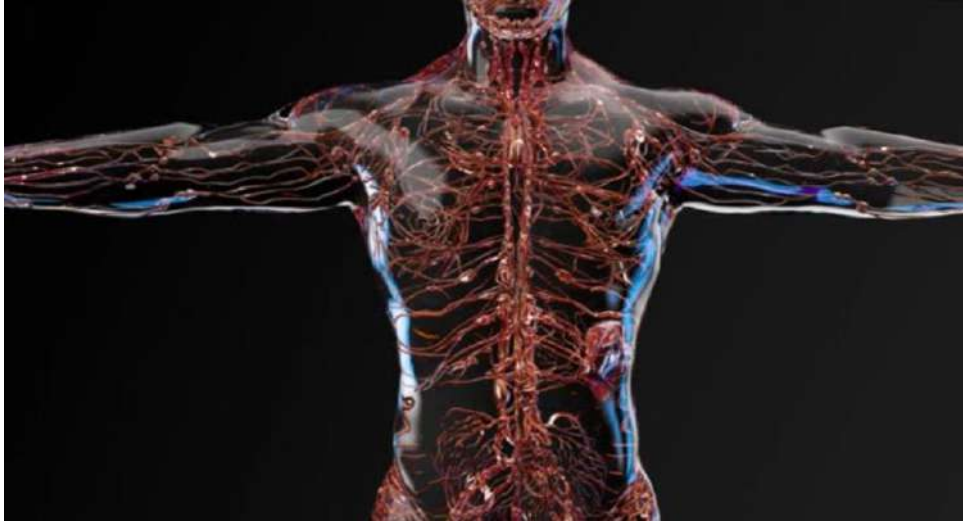
Romanesco Karnabaharı: Doğadaki fraktal örneklerinden biridir. Spiral şeklindeki yeşil konilerin farklı boyutlarda birbirini tekrar etmesiyle şekillenir. Karnabaharın bir parçasına yakından bakıldığında tüm karnabardaki desenin aynısı görülür.



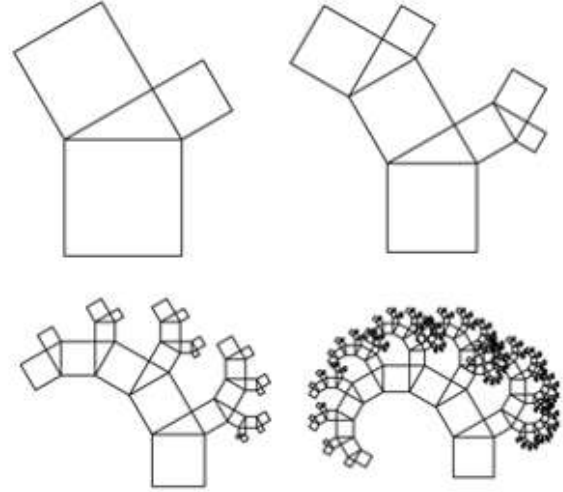
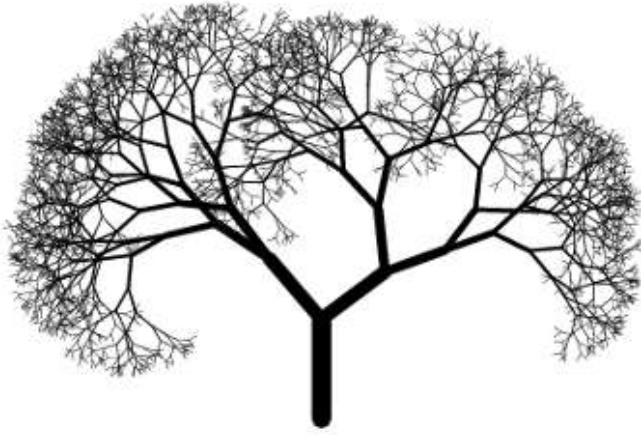
Akciğer: İnsan vücudundaki fraktal örneklerden biridir. Bu sistem, giderek incelen ve sürekli dallanan tüplerden oluşur. Solunan hava, bu dallanmış yapı boyunca ilerleyerek en uçta yer alan mikroskobik hava keseciklerine, yani alveollere ulaşır. Alveoller, gözeneklerin son derece küçültülmüş hâllerini andırır. Yapının bu özelliği, yüzey alanını maksimuma çıkararak gaz alışverişinin son derece verimli gerçekleşmesini sağlar. Öyle ki birkaç tenis kortu büyüklüğündeki yüzey alanı, birkaç tenis topu hacmindeki bir alana sığar. Bu devasa yüzey alanı, vücudun yeterli miktarda oksijen alabilmesi için hayati bir avantaj sağlar.



Kan Damarları: İnsan vücudundaki bir diğer fraktal örneğidir. Bu sayede, vücudun yalnızca yaklaşık %5'lik bir hacmini kaplamalarına rağmen, kanı vücudun en ücra köşelerine kadar ulaştırabilirler. Bronşlara ait tüplere benzer biçimde, kan damarları da giderek daha küçük dallanmalara ayrılan bir yapılanma görülür. Atardamarlar, aort ile başlar ve ilerledikçe daha küçük damarlara ayrılır. Bu dallanma süreci, kılcal damarlar ile devam eder ve birbirine çok yakın, yoğun bir ağ yapısı oluşturarak son bulur. Bu özelliği sayesinde kan damarları, fraktal saçaklara benzer bir yapı olarak ifade edilir.

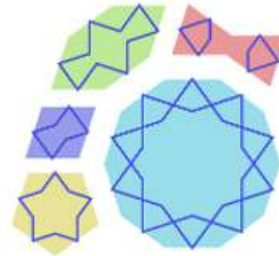
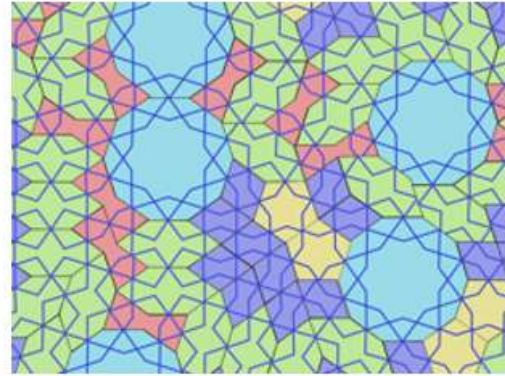
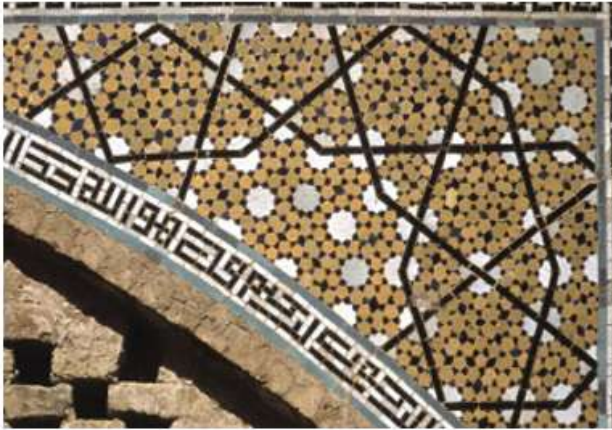


Pisagor Ağacı: Fraktal geometrinin en bilinen yapılarından biri olan Pisagor Ağacı, "fraktal gölgelik" olarak da adlandırılır. Bu yapı, doğruların belirli kurallara göre ayrılması esasına dayanır ve doğadaki dallanma süreçlerine görsel olarak oldukça benzer bir düzen sergiler. İnşa sürecinde doğrular yerine kareler ve üçgenler kullanılır; her adımda bu geometrik şekiller belirli oranlarla çoğaltılarak karmaşık fakat düzenli bir yapı elde edilir. Bu yinelemeli süreç sonucunda kendine benzerlik özelliği taşıyan fraktal bir oluşum ortaya çıkar.



Kendine benzeyen (öz-benzer) fraktal yapılar yalnızca doğada değil, İslam mimarisinde kullanılan geometrik süslemelerde de görülmektedir. Özellikle girih desenlerinde, aynı geometrik şekillerin farklı ölçeklerde tekrarlanması, büyük desenlerin daha küçük benzer parçalara bölünmesiyle sağlanır. Bu yapı, fraktal geometrinin temel kavramlarından biri olan öz-benzerlik ilkesine karşılık gelmektedir.

Harvard Üniversitesi'nden Peter J. Lu ve Paul J. Steinhardt'ın çalışması, bu desenlerin yalnızca estetik amaçlarla değil, bilinçli bir geometrik sistemle üretildiğini ortaya koymuştur. Topkapı Sarayı'nda bulunan 15. Yüzyıla ait Topkapı Parşömeni, İslam mimarlarının ongen, beşgen ve altıgen gibi çokgenlerden oluşan bir girih karo sistemi kullandığını göstermektedir.



■ Atomik Ölçekte Fraktal Düzen: Kuazikristallerin Keşfi

Uzun yıllar boyunca kristaller, atomların uzayda periyodik ve düzenli biçimde tekrarlandığı yapılar olarak tanımlanmıştır. Bu anlayışa göre yalnızca belirli simetri türlerine izin veriliyor, beşli simetri gibi klasik kristalografiye uymayan düzenlerin doğada var olamayacağı kabul ediliyordu. Matematiksel açıdan ilgi çekici olsalar da, bu tür yapıların fiziksel dünyada bir karşılığı olmadığı düşünülüyordu.

Bu yerleşik görüş, 1982 yılında Daniel Shechtman'ın klasik kristal tanımlarına uymayan bir atomik düzeni gözlemlemesiyle sarsıldı. İncelenen yapı ne tamamen düzensizdi ne de bilinen kristaller gibi periyodikti; buna rağmen açık ve kararlı bir düzen sergiliyordu. Daha sonra kuazikristaller olarak adlandırılan bu yapılar, düzen ile düzensizlik arasında yer alan sıra dışı bir geometriye sahipti. O dönemde henüz farkında olunmasa da, bu yapı fraktal geometrinin temel kavramlarından biri olan ölçekten bağımsız düzen fikriyle güçlü bir benzerlik taşıyordu. Ancak bu bulgular, yerleşik kabullere aykırı olduğu...

...gereğesiyle başlangıçta bilim dünyasında sert eleştirilerle karşılandı; Shechtman'ın çalışmaları ciddiye alınmadı, kendisine konuyu yeniden öğrenmesi tavsiye edildi ve bir süre sonra içinde bulunduğu araştırma grubundan ayrılmak zorunda kaldı.

Yaşanan tüm bu olumsuzluklara rağmen Shechtman çalışmalarından vazgeçmedi. Bulgularını farklı kristalografılarla paylaşmaya devam etti ve destek arayışını sürdürdü. Bu süreçte temas kurduğu bilim insanları arasında, matematiksel desenler üzerine çalışan araştırmacılar da bulunuyordu. Bu temaslar, dikkatlerin matematikçi Roger Penrose'un geliştirdiği kendini tekrar etmeyen mozaik desenlerine yönelmesine zemin hazırladı. Penrose mozaiklerinin incelenmesi, araştırmacıların Orta Çağ İslam mimarisinde kullanılan girih desenlerini yeniden değerlendirmesine yol açtı. Girih desenlerinin, Penrose mozaiklerine benzer biçimde periyodik olmayan ancak yüksek derecede düzenli geometrik yapılardan oluştuğu fark edilmiş; yapılan çalışmalar, bu desenlerin yarı kristal düzenlerle aynı matematiksel prensipleri barındırdığını ortaya koymuştur.

Kristalograf Alan Mackay, Penrose'un çalışmaları ve bu çalışmalar ışığında yeniden değerlendirilen İslam mimarisi desenlerinden yola çıkarak, benzer bir düzenin atomik ölçekte de mümkün olup olamayacağını sorguladı. Mackay, maddelerin yapı taşları olan atomların, tıpkı bu mozaikler gibi kendini tekrar etmeyen ancak düzenli dizilimler oluşturabileceğini öne sürdü. Bu fikri sınamak amacıyla Penrose mozaiklerindeki kesişim noktalarına atomları temsil eden noktalar yerleştirdi ve elde ettiği yapıyı bir kırınım ağı olarak inceledi.

Ortaya çıkan kırınım deseni, klasik kristallerde görülmeyen onlu simetriye sahipti. Bu sonuç, periyodik olmadan da düzenli bir atomik yapının mümkün olabileceğini gösteriyor; ancak dönemin kristalografi anlayışı bu tür bir yapıyı tanımlamakta yetersiz kalıyordu. Mackay'nin bu modeli, literatürde henüz adı konmamış olan bu sıra dışı yapıların anlaşılmasında kritik bir köprü işlevi gördü.

Nitekim Daniel Shechtman'ın laboratuvarında gözlemlediği ve başlangıçta açıklanamayan kırınım desenleri, Mackay'nin öngördüğü bu atomik düzenle örtüşüyordu. Paul Steinhardt ve Dov Levine'in çalışmalarıyla birlikte, bu yapılar kuazikristaller olarak tanımlandı ve böylece daha önce varlığı gözlemlenmiş ancak literatürde açıkça tanımlanamamış olan bu atomik düzenler bilim dünyasına kazandırılmış oldu.

Günümüzde yarı kristaller; dayanıklı yüzey kaplamalarından ısı yalıtımına, tıbbi malzemelerden endüstriyel uygulamalara kadar pek çok alanda kullanılmaktadır. Sahip oldukları sıra dışı fiziksel özellikler, bu yapıların yalnızca teorik bir merak konusu olmadığını, aynı zamanda yüksek teknolojinin önemli bir bileşeni hâline geldiklerini göstermektedir.

Sonuç olarak fraktal geometri, yalnızca doğadaki karmaşık şekilleri tanımlayan soyut bir matematik alanı değildir. Doğadan sanata, mimariden atomik yapılara uzanan bu yaklaşım, farklı disiplinlerin aynı geometrik dili konuşabildiğini göstermektedir. Yarı kristallerin keşfi de bu ortak dilin bir sonucudur: Matematiksel desenler, sanatsal sezgi ve fiziksel gözlem birleşerek doğada var olan ancak uzun süre "imkânsız" kabul edilen bir düzeni görünür kılmıştır. Bu çığır açıcı anlayış, ancak yıllar sonra bilim dünyasında tam anlamıyla kabul görmüş ve Daniel Shechtman'a 2011 yılında Nobel Kimya Ödülü kazandırmıştır.

■ Kaynaklar

- [1] Gök, İ. Fraktal geometri. Ankara Üniversitesi Açık Ders Malzemeleri. Erişim adresi: <https://acikders.ankara.edu.tr>

- [2] Hacısalihoğlu, H. H. (2017). Fraktal geometri. Ankara: Metin Yayınları.
- [3] Lu, P. J., & Steinhardt, P. J. (2007). Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture. *Science*, 315(5815), 1106-1110. <https://doi.org/10.1126/science.1135491>
- [4] TÜBİTAK Bilim Genç. (2011, Kasım). TÜBİTAK Bilim Genç Dergisi.
- [5] TÜBİTAK Bilim Genç. (2021). Romanesco karnabaharındaki sarmal fraktalların gizemi çözüldü. Erişim adresi: <https://share.google/FHM0BmQ9kx5Fqhnl1>
- [6] Uyar, A., & Öztürk, D. (2017). Fraktal analizin yeryüzü araştırmalarında kullanılması. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 17(2), 614-627.

Harry Houdini: Bir Sihirbaz mı, Yoksa Bir Matematikçi mi?

ELİF MEDETOĞULLARI

TED Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

✉ elif.medetogullari@tedu.edu.tr



■ 1920’ler New York’unda Bir Gece



Gece yarısına yaklaşırken Broadway’in arka sokaklarından birinde küçük ama şatafatlı bir salon ısıllı parlıyor. İçeride dumanlı bir hava, kahkahalarla karışık fısıldaşmalar, parıltılı giysiler ve dikkatle bekleyen gözler... Salonun merkezinde yükselen küçük bir sahne var. Perdeler açılıyor, ışıklar kısılıyor ve tek bir spot sahnenin ortasındaki adama odaklanıyor.

Adam, dünyanın en ünlü sihirbazı Harry Houdini. Ellerin sıradan görünen beyaz bir kâğıt tutuyor. Ne zincir var bu kez, ne kilitli bir kutu... Yalnızca bir kâğıt. Houdini onu birkaç kez dikkatlice katlıyor. Salon sessizleşiyor. Bir makas parıltısı göze çarpıyor. Houdini, tek bir hamleyle kâğıda bir kesik atıyor.

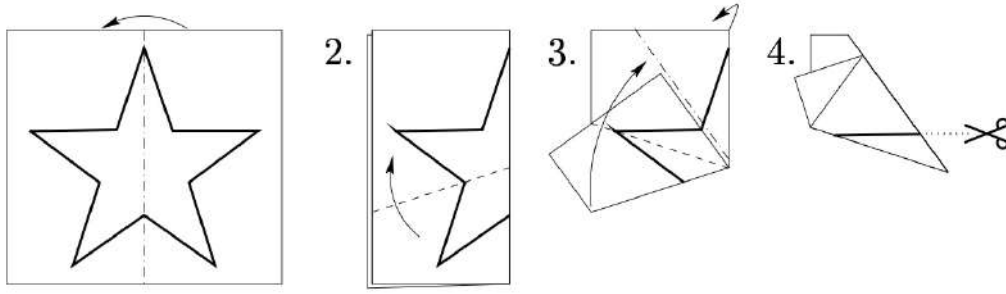
O an sanki zaman duruyor. Seyirciler nefeslerini tutmuş. Kâğıt açıldığında ise herkesin gözleri büyüyor: sıradan kâğıt, tek bir kesikle kusursuz bir yıldız şekline dönüşmüş. Salon alkışlarla çalkalanıyor.

Bir an için herkes sihre inanıyor. Ama perde arkasında, bu “mucizenin” matematikle gizli bir bağı var...

■ Houdini ve Kâğıdın Sihri

Harry Houdini (1874–1926), asıl adıyla Erik Weisz, Macaristan’da doğup Amerika’da ünlenen bir illüzyonistti. Zincirlere, kelepçelere, su dolu tanklara meydan okuyan kaçış gösterileriyle dünyanın dört bir yanında şöhret kazandı. Onun için sahne yalnızca eğlencenin değil, aynı zamanda insanın sınırlarını zorlamanın da yeri idi.

Ne var ki Houdini’nin ilgisi yalnızca zincirlerden kurtulmaya değildi. 1922’de yayımladığı *Paper Magic* (Sihirli Kâğıt ya da Kâğıt Sihri/Kâğıttan Sihir) isimli kitabında, kâğıtla yapılabilecek basit ama şaşırtıcı illüzyonları topladı [3]. Sayfalar arasında kâğıttan yüzükler, şapkalar, tavşan figürleri ve seyirciyi hayrete



Şekil 1. Houdininin *Paper Magic* kitabında tarif edilen beş tepeli yıldız. Çizgiler boyunca okla belirtilen yönlerde kesikli çizgiler boyunca katlayıp, makasla kalın siyah çizgi boyunca kesin. [4]

düşüren “tek kesik” numaraları yer alır. Bir kâğıdı katlayıp tek hamlede yıldız çıkarmak, ya da basit bir kesikle karmaşık şekiller elde etmek... Bugün bunlar “çocuk oyunu” gibi görünse de, Houdini döneminde seyirciyi büyüleyen bir mucizeydi.

Matematiksel açıdan bakıldığında, *Paper Magic* sıradan bir eğlence kitabı olmanın ötesine geçer. Çünkü burada tarif edilen birçok numara aslında katlama geometrisinin erken örnekleridir. Houdini belki bunu “matematik” adı altında sunmuyordu, ama kâğıdın potansiyelini keşfetmeye yönelik merakı, ileride matematikçilerin üzerinde çalışacağı büyük problemlere kapı aralıyordu.

■ Tek Kesik Problemi

Houdini’nin *Paper Magic* kitabında yalnızca bir sahne numarası gibi görünen “tek kesik” hilesi, aslında matematikte daha genel ve derin bir problemle örtüşür. Bu problem günümüzde “Fold-and-Cut Theorem” ya da Türkçe ifadesiyle “Katla ve Tek Kes” problemi olarak bilinir.

Problem Tanımı: Bir dülemsel çokgen P verilsin. Bu çokgeni, bir kâğıdın üzerine yerleştirmek istiyoruz. Acaba bu kâğıdı yalnızca katlama işlemleriyle öyle bir hale getirebilir miyiz ki, tek bir düz kesim yapıldığında P çokgeni eksiksiz ve doğru biçimde ortaya çıksın?

Başka bir ifadeyle: *Hangi şekiller yalnızca tek bir kesikle elde edilebilir?*

Kirigami: Origami, -ori (katlanmış ya da katlamak) ve-gami (kâğıt) kelimelerinin birleşiminden oluşan bir sözcüktür. Bu problemde ise katlamanın yanısıra kesmeye de mücade edilir. Bu durum için kullanılan sözcük ise “kirigami” dir. (Kiri’ nin kesmek anlamına geldiğini tahmin ediyorsunuzdur:)) Yapmayan yoktur diye düşünüyorum, anakuldayken ya da ilkokuldayken kâğıdı katlayıp keserek elele tutuşan çocuklar elde ederdik.



Hemen bu noktada sizi geçmişe götürelim ve kirigami denemeleri yapalım ama bu sefer bir kısıtımız var, makasla tek bir kesik atma hakkımız var. E büyüdük artık, işler biraz daha zorlaşsın değil mi?

Örnek 1.

Kare kağıdı uygun şekilde katlayıp, tek bir kesikle

- önce eşkenarüçgen kesmeyi deneyin,
- ardından bir kare kesmeyi deneyin,
- sonra kağıdın yarı alanına sahip bir kare deneyin,
- sonra düzgün altıgen,
- düzgün sekizgen,
- daha sonra düzgün beşgen ve düzgün beş tepeli yıldız

deneyin. Peki düzgün yedigen ya da dokuzgen için de benzer işlemleri yapabilir miyiz sizce? Problemi biraz daha zorlaştırmak isterseniz, katlama sayınıza sınır koyun, örneğin en fazla 4 katlama ile bu işlemi yapabilir miyim? Peki üç yeterli olur mu? Bu soruların bazılarına cevaplar ve farklı kirigami örnekleri Google booksta Cansu Betin Onur ve Sinem Onaran’la birlikte etkinlik örneklerimizi topladığımız ücretsiz kitaba bakabilirsiniz:



Bu problem kombinatoriyal geometri ve algoritmik origaminin kesişiminde yer alır. Katlama işlemi düzlemin belirli bölgelerini üst üste bindiren geometrik dönüşümlerdir. Tek kesik, bütün bu katlamaların sonucunda oluşan karmaşık üst üste binmiş kâğıt tabakalarının bir "tek kesme işlemi" ile kesilmesidir. Burada kritik nokta, çokgenin tüm kenarlarının aynı anda ortaya çıkmasını sağlamaktır.

Matematikçilerin merakı şuydu: *Sadece bazı özel şekiller mi bu yolla elde edilebilir, yoksa her çokgen için böyle bir katlama vardır mı?* Hatta çokgenin tek parça ve bağlantılı olmasına bile gerek yok!

■ Problemin Çözümü: Fold-and-Cut Teoremi

Bu soruya kesin yanıtı 1998–1999 yıllarında Erik D. Demaine, Martin L. Demaine ve Anna Lubiw verdi. Ortaya koydukları teorem günümüzde "Fold-and-Cut Theorem" olarak bilinir [4, 5].

Teorem 1. (Demaine–Demaine–Lubiw, 1998/1999)

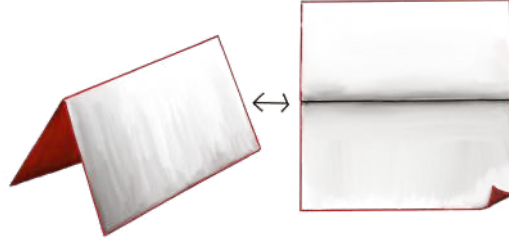
Herhangi bir düzlemsel çokgen P , uygun katlamalar yapılarak bir kâğıt üzerinde öyle yerleştirilebilir ki, tek bir düz kesim sonucunda P eksiksiz ve doğru biçimde ortaya çıkar.

İspat: Yöntem İki farklı yöntemle bu teorem kanıtlanabilmektedir.

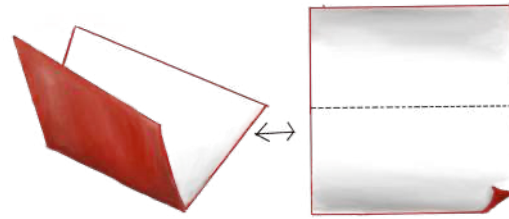
- İlk yöntem, "*straight skeleton (doğrusal iskelet)*" yöntemini kullanıyor, kullanıcı dostu bir yapıcı algoritma sunuyor ancak matematiksel olarak ispatı biraz zayıf (Bu yazıda bu algoritma verilecektir:))
- İkinci yöntem ise "*disc packing (daire paketleme)*" yöntem olarak bilinen bir yöntemle teorik olarak daha güçlü ancak pratikte uygulaması daha karmaşık bir yöntem.

Doğrusal iskelet yöntemi 1995 yılında Oswin Aichholzer ve arkadaşlarının makalesinde verilmiş [1] ve bir çok araştırmada farklı şekillerde kullanılmıştır. Temel olarak bir poligonun içine giderek küçülen (ya da büzülen), eşit aralıklarla çokgenin kenarlarına paralel kenarlarını oluşturduğumuzda ve en sonunda başlangıçtaki poligonun ve içerde çizilen tüm poligonların köşelerini birleştirerek kenarlar ve/veya köşeler ve/veya küçültme işlemi sonunda elde kalan kenarla elde edilen bir graftır. Demaine ve arkadaşları bu yöntemi kullanarak kesmek istediğimiz çokgeni kağıda çizer ve içinde köşelerden geçen aslında çokgenin açıortaylarında oluşan doğrusal iskeletini elde ederler. Aşağıda bazı önemli tanımlardan bahsettikten sonra basit örneklerle neden doğrusal iskelet yönteminin işe yarar bir araç olduğunu göreceğiz. Buradaki en

önemli ve çok sık kullanılacak ifadelerden biri de "kat izi (crease)" ve türleridir. Kağıdı her katladığınızda üzerinde bir çizgi oluşur buna kat izi deriz. Katlanmış bir modeli açtığınızda "kat izi desenini (crease pattern)" elde edersiniz. Kat izi desenlerinde iki farklı çizgi göreceksiniz, örneğin "düz çizgi, kesikli çizgi" gibi veya "kesikli çizgi, kesikli ve noktalı" çizgi ya da "mavi çizgi, pembe çizgi" gibi. Bir tür çizgi boyunca dağ (yani dış bükey) diğeri boyunca da vadi (yani içbükey) katlama yapacağınız anlamına geliyor.

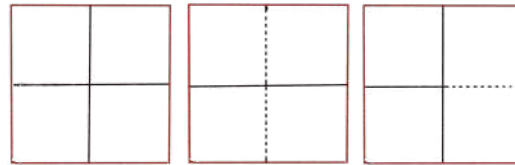


Şekil 2. Dış bükey kat izi (yani Dağ)

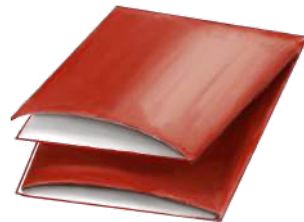


Şekil 3. İç bükey kat izi (yani Vadi)

Not: Kağıdı kat izi desenlerinde belirtilen tüm izleri dağ/vadi atamalarına göre yapıp katladıktan sonra elde ettiğiniz bir modeli bir kitabın içine yeni bir kat izi oluşmadan veya herhangi bir kat izinin yönü değişmeden koyabiliyorsanız o modele *düz katlanabilir* (flat foldable) model denir.



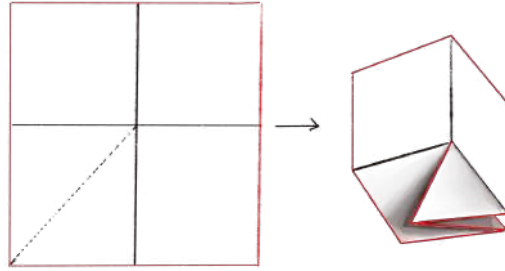
Şekil 4. Bu kat izlerinin tümünü türüne (dağ/vadi) uygun katlayabilir misiniz?



Şekil 5. Şekil 4'teki kat izi desenlerinden sadece en sonuncu kat izi deseninin katlandığını görmüşsünüzdür. Bu kat izi deseninin katlanmış haline *basit* ya da *temel* katlama denir.

Tek köşeli kaz izi desenleri için düz katlanabilirlikle ilgili üç temel teorem vardır. Kawasaki, Meguro ve Maekawa teoremleri [7]. Kawasaki teorem bir köşe etrafındaki kat izilerinin aralarında kalan açılarla ilgili şunu söyler: Birer atlayarak açılar topladığımızda 180° olmalıdır. Maekawa'da "bir köşede birleşen

dağ ve vadi kat izi sayılarının farklı iki olmalıdır" der. Meguro ise düz katlanabilir modelin iki renkle boyanabileceğini söyler. Maalesef birden fazla köşeli kat izi desenleri için bu problemlerin bazıları NP-Tamdır, [2].

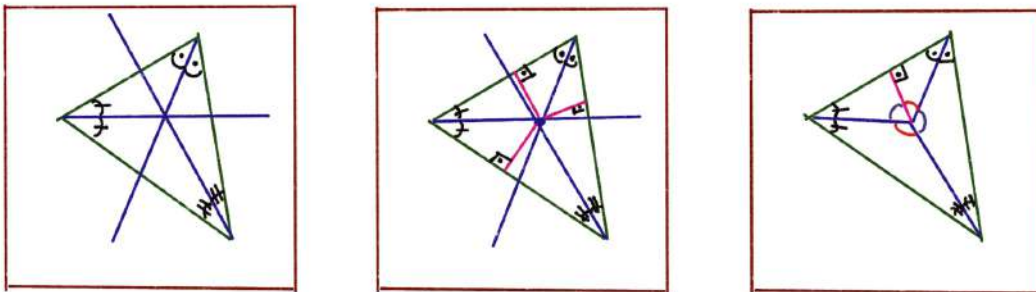


Şekil 6. Soldaki kat izi deseni, dağ ve vadi sayılarına bakarsanız Maekawa teoremini sağlamadığını göreceksiniz ($4 - 1 \neq 2$) dolayısı ile kat izleri türlerine uygun katlandığında sağdaki gibi düz katlanabilir olmayan bir model elde edilecek.

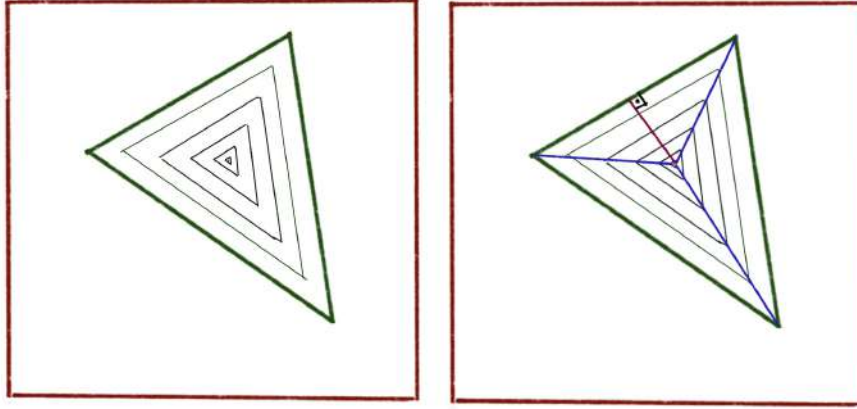
Kağıdı katlayıp kesebilmek için de düz katlanabilir hale gelmesi gerekir. Dolayısı ile bu yazıda bahsedilen problemin çözümünde elde edilecek kat izi desenin yerel olarak Kawasaki ve Maekawa koşullarının sağlanması kriteri göz önüne alınır.

■ Arka Plan

Katla ve tek kes teoremi, herhangi bir düzlemsel çokgenin uygun katlamalarla tek bir düz kesimle elde edilebileceğini söyler demiştik. İspat yapıcıdır: bir *doğrusal iskelet* üzerinden türetilen kat izi deseni ve uygun dağ/vadi atamaları, tek kesimi mümkün kılar. Aslında elde edilen iskelet çokgenin açkırtaylarından oluşmakta ve bu iskelete köşelerden kesim hattına çizilen uygun dikmelerle gerekli kat izi deseni üretilmektedir. Bu kat izi deseni tek değildir. Eğer kesmek istediğimiz çokgen bir üçgense, doğrusal iskeletin aslında üçgenin tek noktada birleşen açkırtaylarını demek olduğunu görelim. Örnek 1’te bahsedilen şekiller üçgen dahil düzgün çokgenlerdi, bu nedenle simetrik katlamalarla çözüme ulaşmak biraz daha kolaydı. Burada ise çeşitkenar bir üçgen için bir çözüm bulmaya çalışacağız. Ama oradaki üçgen için kullandığınız fikrin burada da işlediğini görebilirsiniz.

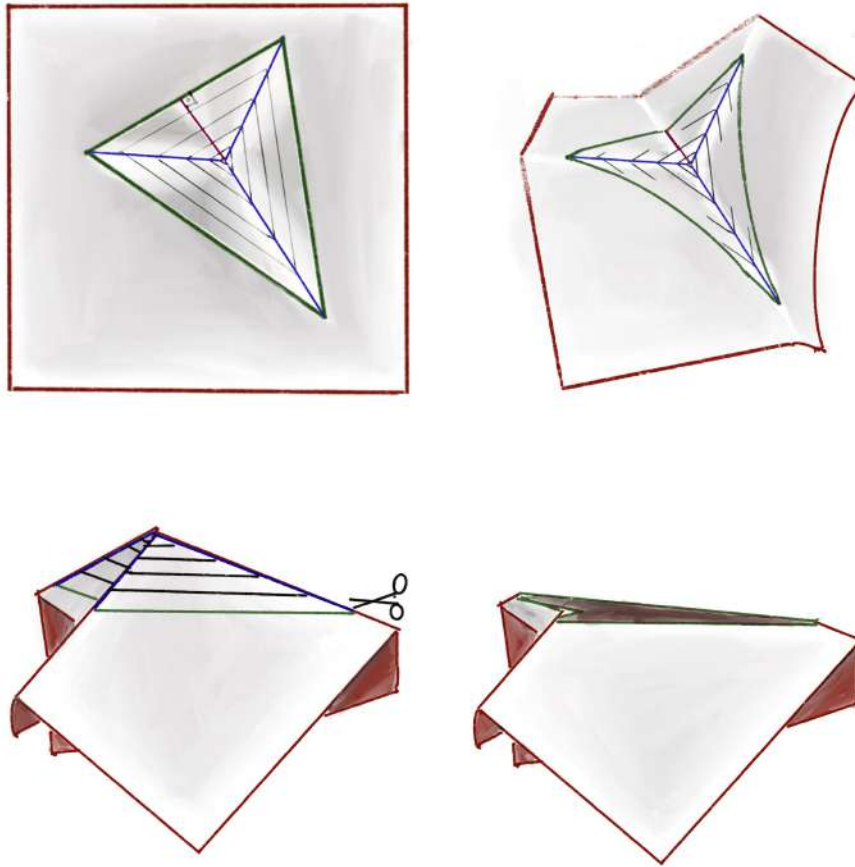


Şekil 7. Herhangi bir üçgenin açkırtayları bir noktada keşişir. Bu noktadan üçgenin kenarlarına dikme inmek mümkündür (içteğet çemberin yarıçapları). Açkırtayları dağ, bu dikmeyi vadi alalım. Bu dikmelerden sadece bir tanesini almamız yeterlidir. Son resimde böylece Maekawa teoremi sağlanır (çünkü $3 - 1 = 2$). Açılarla ilgili de Kawasaki teoreminin sağlandığını hemen görebilirsiniz yani mor açılarının toplamı da kırmızı açılarının toplamı da 180° ’dir.



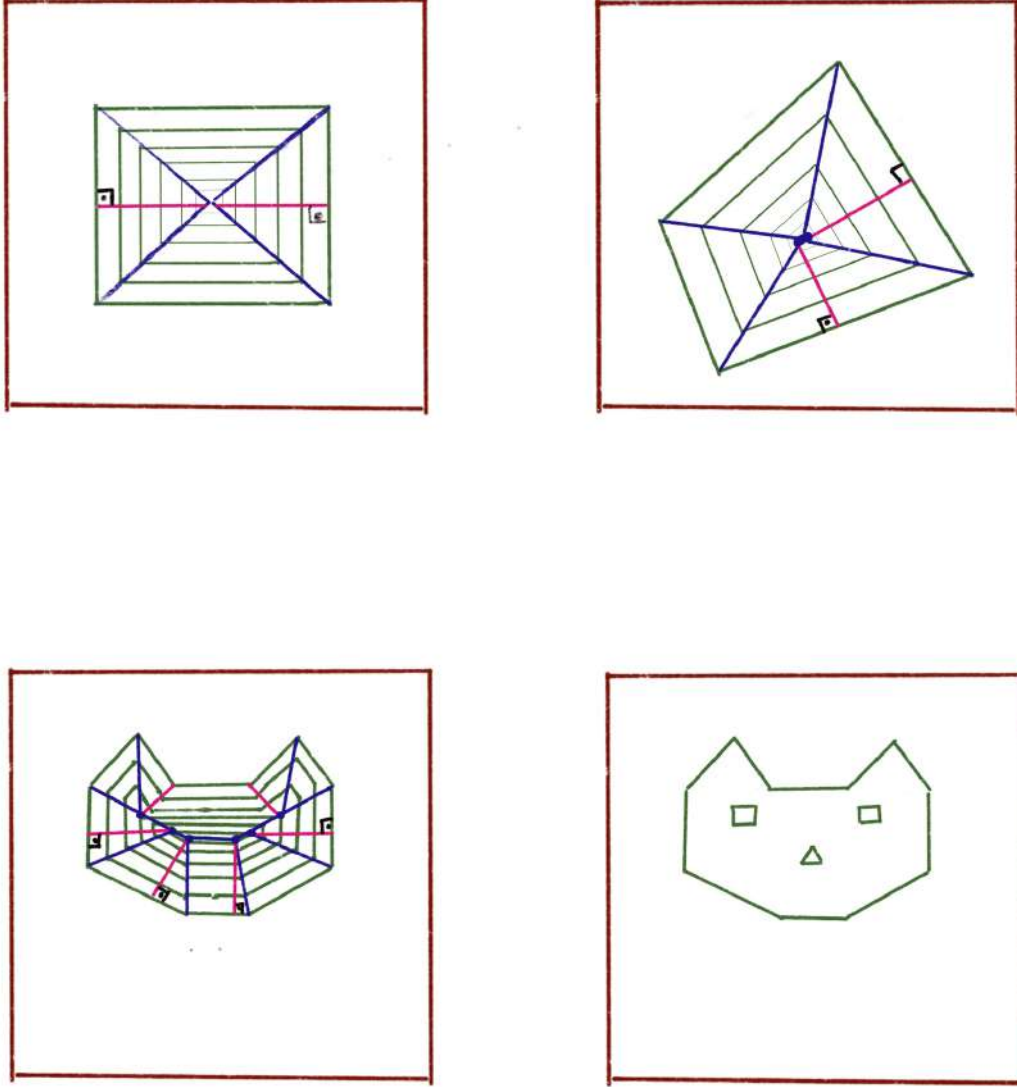
Şekil 8. Aichholze ve arkadaşlarının makalesinde [1] tarif edilen yöntemle doğrusal iskelet oluşturuldu (mavi) ve düz katlanabilirlik teoremlerine uygun dikme (pembe) eklendi. 7 ile karşılaştırarak elde edilen doğrusal iskeletin altında açortaylar olduğunu görebilirsiniz)

Şimdi kat izlerinin türüne uygun katladığınızda üçgenin kenarlarının düz bir çizgi şeklinde kağıdın ön ve arka yüzünde yer aldığını göreceksiniz.



Şekil 9. Kat izlerine uygun biçimde (maviler çizgiler boyunca dağ, pembe çizgi boyunca vadi) katladığınızda yeşil ile çizilen üçgenin kenarlarının üstüste geldiğini göreceksiniz. 3. adımda belirtiliği gibi bu çizgi boyunca makasla keserseniz ve açarsanız üçgeni tek kesikle elde edeceksiniz.

Şimdi sırasıyla bir kare ardında özel olmayan bir dörtgen alıp doğrusal iskelet ve ardından dikmeleri bulalım:



Şekil 10. Sırasıyla, bir kare, herhangi bir dörtgen ve bir kedi:) kat izleri oluşturuldu. Bu izlerden türüne (dağ/vadi) uygun katlamaları yapıp keserseniz istenilen modeli tek kesile elde edebilirsiniz. Sonuncu figürün kat izlerini sizlere bir meydan okuma olarak bıraktık. Doğru kat izlerini bulup kesen ilk kişiye bir sürprizim olacaktır.

Artık Demaine ve arkadaşlarının verdiği algoritmayı yazalım. Elbette algoritmada burada verilenden çok daha karmaşık örnekler için verilen *koridor türü belirleme* ve *ağaç kontrolleri* var. Bu yöntemlerden bu yazının uzunluğunu göz önünde bulundurarak burada bahsetmeyeğiz. Ayrıca konu ile ilgili açık sorular olduğunu da tüm ilgililere duyuralım. Size bu algoritma ile elde ettiğimiz kedi modelinin kat izlerini Şekil 10'da 3. resimde verdik. Bu model de koridor veya ağaç kontrollerine ihtiyaç duymaz.

■ Algoritma Şeması (Özet)

Algorithm 1 Katla ve Tek Kes teoremi için Doğrusal İskelet Tabanlı Şema

Require: Basit (veya delikli) düzlemsel çokgen ya da çokgenler ailesi P

Ensure: Tek düz kesimle P 'yi ortaya çıkaran kat izi deseni (Dağ-Vadi atamalarıyla)

- 1: **Ön işleme:** Girdi çokgen(ler)ini saat yönüne/tersi tekdüze yönlendir; iki-renkli yüz ayrımıyla dış/iç bölgeleri ayır.
- 2: **İskelet hesabı:** Kenarları eşzamanlı içe doğru *offset*; köşe ikililerinin açığortay kesişimleri *edge event* (*kenar olayı*), bir köşenin karşı kenarla buluşması *split event* (*ayrı olay*) üretir. Olayları uzaklığa göre bir öncelik kuyruğunda işle ve doğrusal iskelet grafini inşa et.
- 3: **Dik katlar:** Doğrusal iskeletin köşelerinden kesim hattına inen *dik* kat izleri üret. Her dik ışın yüzeyi terk edene ya da bir başka bir kesim hattı bölgesindeki iskeletin kenarından yansıtılarak iskeletin bir köşesine varana kadar *yansımali* şekilde ilerlet.
- 4: **Kâğıt sınırı:** Tüm iskelet ve dik ışınları, kat izi desenini tamamen kapsayan bir dikdörtgen sınırla (kâğıt) sınırlayıp sonlu hale getir.
- 5: **Koridorlar:** İskelet ve dik katlardan oluşan ağda koridorları (akordiyon kanalları) belirle; her koridor için katlanma yönü alternansını (Dağ/Vadi) oluşturun.
- 6: **Dağ/Vadi ataması:** Koridor alternansı ile tüm kat izi kenarlarına Dağ/Vadi ata; doğrusal iskelette, 180° den küçük açıların açığortayları dağ, 180° den küçük açıların açığortayları dağ, 180° den büyük açıların açığortayları vadi olur. Dikler dağ/vadi olarak değişir. Gerekli yerlerde gölge-ağaç/mesafe tabanlı tutarlılık kontrolü uygula.
- 7: **Kesim hattı:** Çokgen kenarlarının *aynı doğruya hizalandığı* hattı seç; tek düz kesimi bu hat üzerinde yap.
- 8: **return** Dağ-Vadi etiketli kat izi deseni.

■ Peki kimdir Eric Demaine? - Genç Bir Dâhi

Eric D. Demaine (d. 1981), bilgisayar bilimi ve matematik alanında origamiyle ilgili çalışmalarıyla dünya çapında tanınan bir isimdir. Çocukluğundan itibaren babası Martin Demaine ile birlikte yoğun bir şekilde origamiyle ilgilenmiş, bu ilgisini akademik araştırmaya dönüştürmüştür.

Demaine, 20 yaşında Massachusetts Institute of Technology (MIT) tarihindeki en genç profesörlerden biri olmuştur. Çalışmalarının merkezinde algoritmik geometri, kombinatorik optimizasyon ve origami matematiği vardır. Katlama problemlerini yalnızca estetik bir uğraş olarak değil, bilgisayar biliminin temel algoritmik sorularıyla yakından ilişkili bir araştırma alanı olarak ele alır.

Özellikle *fold-and-cut teoremi*, origaminin bir "sanat" olmaktan öte, katı bir matematiksel yapı olduğunu ortaya koymuştur. Demaine ve ekibinin geliştirdiği algoritmalar, yalnızca origami değil, aynı zamanda malzeme bilimi, robotik ve mühendislikte katlanabilir yapıların tasarımında da kullanılmaktadır.



Demaine'nin dersi için QR kodu:

Bugün Eric Demaine, MIT'de bilgisayar bilimi profesörü olarak çalışmakta, origami ve matematik kesişiminde yeni problemler üzerine üretken bir araştırma programı yürütmektedir. Aynı zamanda babasıyla birlikte "mathematical art" sergileri açarak, bilimle sanat arasındaki sınırları zorlamaktadır. (Bakınız:



Şekil 11'de Eric Demaine'in elinde yer alan bağlantılı olmayan çokgenler gibi modelleri veya başka şaşırtıcı

modelleri tek kesikle nasıl elde edebileceğinize dair kat izi desenlerinin şablonları bu sayfada (





Şekil 11. Demaine'nin MİT'de, katla ve kes teoremini anlattığı dersten aldığım bu karede, kestikten sonra kağıttan birden fazla parça bağlantısız şeklin tek kesikle elde edilebilmesinin onda uyandırdığı heyecanı görebilirsiniz. Tüm dersi izlemek için aşağıdaki QR kodu kullanabilirsiniz.

verilmektedir, meydan okuma sorumuz Şekil 10'da verilen soru için bu şablonlardan destek almak isteyebilirsiniz:)).

■ Sonuç: Sihir ile Matematik Arasında İnce Bir Çizgi

Bir yanda 1920'lerin New York'unda, sahnede tek bir kesikle yıldız çıkaran bir sihirbaz: Harry Houdini. Diğer yanda 1990'ların sonunda, teorik bilgisayar biliminin en saygın konferanslarında aynı soruya kesin bir yanıt veren matematikçiler: Erik Demaine ve ekibi.

Houdini için bu, seyircinin nefesini kesen bir illüzyondur. Basit bir kâğıt, birkaç katlama ve tek bir makas darbesiyle mucizeye dönüşüyordu. Seyirciler alkışlarken, belki de hiçbiri bunun ardında evrensel bir matematiksel ilkenin gizlendiğini düşünmüyordu.

Demaine içinse aynı kâğıt, soyut bir düzlem, çokgenlerin geometrisi ve algoritmaların diliydi. Bir ispat, yalnızca özel şekiller için değil, her çokgen için tek kesikle elde edilebilirliği güvence altına alıyordu. Burada sihir yoktu; ama en az sihir kadar büyüleyici bir hakikat vardı: kâğıdın altında yatan matematiksel düzen.

Belki de Houdini gerçekten yalnızca bir sihirbazdı. Belki de farkında olmadan matematik tarihine ilham veren bir öncüyü oynuyordu. Kesin olan şu ki, kâğıdın katları arasında hem illüzyonun hem de matematiğin ortak bir dili var. Katlanmış bir kâğıdın sessizce fısıldadığı şey şudur: **Bazen sihir/mucize, yalnızca doğru zamanda atılmış tek bir kesiktir.**

■ Uyarı: Tarihsel Bağlantının Sınırları

Houdini'nin yaşadığı yıllarda "Geometry of Paper Folding, T.Sundara Row, (1890)", "Hidden Senbazuru Orikata (Bin Turna Katlamanın Sırları), Akisato Ritō, (1797)" "A Japanese Book Wokoku Chiyekurable, K.S. Sen, (1721)" kitapları vardı ve origami özellikle avrupada okullarda kullanılmaya başlamıştı. Dolayısı ile Houdini'nin origami bildiğini tahmin etmek zor değil. Houdini'nin Paper Magic kitabındaki tek kesik numaraları, bugün katla ve tek kes teoreminin özel örnekleri olarak yorumlanabilir. Ancak bu noktada dikkat edilmesi gereken iki sınırlama vardır: Birincisi, Houdini'nin esas amacı sahne illüzyonu yaratmaktı. İkincisi, elimizde Demaine ve arkadaşları'nın doğrudan Houdini'den esinlendiğine dair bir kanıt yoktur. Dolayısıyla bu bağlantı, birebir bir nedensellikten çok, aynı fenomenin farklı bağlamlarda ortaya çıkışı olarak düşünülebilir. Houdini'nin yaptığı şey sınırlı sayıda basit şekille gösterilen bir sihirdi; Demaine ve arkadaşları'nın ispatı ise bu fikrin evrensel düzeyde, tüm çokgenler için geçerli olduğunu ortaya koymuştur.

■ Kaynaklar

- [1] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, D. Albers, and B. Gärtner, "A novel type of skeleton for polygons," *Journal of Universal Computer Science*, vol. 1, no. 12, pp. 752–761, 1995.

- [2] M. Bern and B. Hayes, “The complexity of flat origami,” in *Proceedings of the 7th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '96)*, pp. 175–183, 1996.
- [3] H. Houdini, *Paper Magic: A Treatise on the Art of Paper Folding*. E.P. Dutton & Company, 1922.
- [4] E. D. Demaine, M. L. Demaine, and A. Lubiw, “Folding and Cutting Paper,” *Discrete & Computational Geometry*, vol. 20, no. 1, pp. 3–21, 1998.
- [5] E. D. Demaine, M. L. Demaine, and A. Lubiw, “Folds and One Straight Cut Suffice,” *Proc. 10th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'99)*, pp. 891–900, 1999.
- [6] T. C. Hull, *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. A K Peters, 2006.
- [7] T. C. Hull, *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*. Cambridge University Press, Cambridge, 2020.
- [8] R. J. Lang, *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*, 2nd ed., CRC Press, 2012.

Değişmeli Banach Cebirlerinin Gelfand Teorisi

UĞUR GÜL

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

✉ gulugur@hacettepe.edu.tr



Bu yazıda değişmeli Banach cebirlerinin en temel yapı teorisi olan Gelfand Teorisini ele alacağız. Büyük Rus matematikçi Israel Moiseevich Gelfand'ın (1913-2009) doktora tezinde (1935) geliştirdiği bu teori değişmeli Banach cebirlerinin sürekli fonksiyon uzayları ile bağlantısını ortaya koyması bakımından matematik literatüründe çok önemli bir yere sahiptir.

1. BANACH CEBİRLERİ

Bir A vektör uzayı üzerinde onu aynı zamanda halka yapan bir çarpım var ise A 'ya bir **cebiri** denir. Bu yazıda vektör uzaylarımız daima karmaşık sayılar cismi $\mathbb{C}$ üzerinden olacaktır. Eğer A cebri normlu bir vektör uzayı ise A 'ya bir **normlu cebiri** denir. Eğer A normlu cebri, normun türettiği metriğe göre tam ise, yani A 'daki her Cauchy dizisi yakınsak ise, (bir başka deyişle A bir Banach uzayı ise) ve A 'nın üzerindeki çarpım

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A$$

aksiyomunu sağlıyorsa, A 'ya bir **Banach cebri** denir. Bir Banach cebirinin halka yapısını incelemek için onun tersinir elemanlarını incelemek önemlidir. Tersinirlikten sözedebilmemiz için cebrimizin birimli olması yani çarpma işleminin bir birim elemanı olması gerekir. Ne yazık ki her Banach cebirinin birimi yoktur. Bunun en bilinen örneği X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı olmak üzere

$$K(X) := \{T : X \rightarrow X \mid T \text{ tıkHz doğrusal operatördür}\}$$

ile tanımlanan tıkHz operatörler cebridir.

1.1. Banach Cebirlerine Örnekler

(1) X tıkHz Hausdorff bir topolojik uzay olmak üzere

$$A := C(X) : \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ sürekli}\}$$

sürekli fonksiyonlar uzayı noktasal toplam

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

noktasal çarpım

$$(fg)(x) := f(x)g(x)$$

işlemleri ve

$$\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

normu ile bir Banach cebridir. Burada A 'nın normunun

$$\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_{\infty} \quad \forall f, g \in A$$

şartını sağladığı aşikardır.

(2)

$$A := C_0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ sürekli ve } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R} \setminus [-N, N]\} < \varepsilon\}$$

biçimindeki sonsuzda sıfır olan sürekli fonksiyonlar uzayı da noktasal toplam, noktasal çarpım ve

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

normu ile bir Banach cebridir.

(3) X bir Banach uzayı olmak üzere

$$A := B(X) := \{T : X \rightarrow X : T \text{ doğrusal ve sınırlı operatör}\}$$

biçimindeki sınırlı doğrusal operatörler uzayı da noktasal toplam

$$(S + T)(x) := Sx + Tx,$$

bileşke işlemi

$$(ST)(x) := S(T(x))$$

ve operatör normu

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_X : \|x\|_X \leq 1\}$$

ile bir Banach cebridir. Yine A 'nın normunun

$$\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\| \quad \forall T, S \in A$$

şartını sağladığı aşikardır.

(4) Yine X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı olmak üzere

$$A := K(X) := \{T : X \rightarrow X : T \text{ doğrusal ve tıkHz operatördür}\}$$

biçimindeki tıkHz operatörler uzayı, yine noktasal toplam

$$(S + T)(x) := Sx + Tx,$$

bileşke işlemi

$$(ST)(x) := S(T(x))$$

ve operatör normu

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_X : \|x\|_X \leq 1\}$$

ile bir Banach cebridir.

Bir $T : X \rightarrow X$ operatörü $S := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ için $\overline{T(S)} := \overline{\{Tx : x \in S\}} \subset X$ 'de tıkHzdır şartını sağlıyorsa yani X 'in kapalı birim yuvarının T altındaki görüntüsünün kapanışı X 'de tıkHz ise T 'ye bir **tıkHz operatör** denir. TıkHz operatörler sınırlıdır ve eğer $K(X) = B(X)$ ise X sonlu boyutludur ve bu da $I : X \rightarrow X, I(x) := x$ birim operatörünün tıkHz olmasına denktir (Bir Banach uzayı sonlu boyutludur ancak ve ancak kapalı birim yuvarı tıkHzdır).

Yukarıdaki ilk iki örnek değişmeli Banach cebirlerinin tipik örnekleridirler, ilk örnek birimli iken ikinci örnek birimli değildir. Son iki örnek ise değişmeli olmayan Banach cebirlerinin tipik örnekleridirler, üçüncü örnek birimli iken son örnek birimli değildir.

2. BİRİMLEŞTİRME

Bir Banach cebri birimli değil ise onu birimli bir Banach cebirinin içerisine izometrik olarak gömme işlemine **birimleştirme** denir. Burada temel fikir Banach cebirindeki bir $a \in A$ 'yı A 'nın kendisi üzerindeki bir çarpma operatörü olarak görmektir, yani her $a \in A$ 'ya bir $M_a : A \rightarrow A, M_a(b) := ab$ operatörü karşılık gelir.

Yani $\iota : A \hookrightarrow B(A)$, $\iota(a) := M_a$ şeklinde bir operatörle A , $B(A)$ içerisine gömülür. Fakat bu gömme her zaman izometrik olmayabilir, ancak

$$\|ab\|_A \leq \|a\|_A \|b\|_A \quad \forall a, b \in A$$

olduğundan dolayı

$$\|M_a\| \leq \|a\|_A \quad \forall a \in A$$

sağlanır. Bu ι gömmesi her zaman izometrik olmayacağından onu taklit eden bir inşaa ile A 'nın bir birimleştirilmesi dışsal olarak yapılabilir:

$$\tilde{A} := \mathbb{C} \oplus A := \{(\lambda, a) : \lambda \in \mathbb{C}, a \in A\}$$

olsun. Bu $\tilde{A}$ kümesine çarpımı, $\iota : A \hookrightarrow B(A)$ gömmesinden ilham alarak yani

$$(\lambda I + M_a)(\mu I + M_b) = \lambda\mu I + M_{\lambda b + \mu a + ab}$$

olduğunu gözönünde bulundurarak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $a, b \in A$ için

$$(\lambda, a) \cdot (\mu, b) := (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab)$$

olarak tanımlayabiliriz. Aynı şekilde toplam

$$(\lambda, a) + (\mu, b) := (\lambda + \mu, a + b)$$

olarak tanımlanır. Bir tek $\tilde{A}$ üzerinde norm tanımlamak kalıyor ki onu da

$$\|(\lambda, a)\| := |\lambda| + \|a\|_A$$

şeklinde tanımlarız. Bu durumda $\iota : A \hookrightarrow \tilde{A}$, $\iota(a) := (0, a)$ şeklindeki gömme izometriktir ve $(1, 0_A) \in \tilde{A}$, $\tilde{A}$ 'nın birimi olur. Yani $\tilde{A}$ birimli bir Banach cebridir ve $\iota : A \hookrightarrow \tilde{A}$ izometrik bir gömmedir. Burada her $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $a, b \in A$ için

$$\|(\lambda, a)(\mu, b)\| \leq \|(\lambda, a)\| \|(\mu, b)\|$$

şartının sağlandığını da görmek zor değildir. Ayrıca eğer A değişmeli ise $\tilde{A}$ da değişmelidir. Birimleştirme ile eğer A Banach cebri birimli değilse A 'nın yerine onun $\tilde{A}$ birimleştirmesini alarak birimli varsayabiliriz.

3. TERSİNİR ELEMANLAR VE SPEKTRUM

A birimli bir Banach cebri olsun öyle ki $1 \in A$, A 'nın birim elemanı, yani A 'nın üzerindeki çarpmanın birimi olsun. O hâlde bir $a \in A$ elemanı için bir $a^{-1} \in A$ varsa ki

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

sağlanır, bu durumda $a \in A$ 'ya **tersinir** denir. Birimli bir A Banach cebri için

$$\mathcal{G}(A) := \{a \in A : a \text{ tersinirdir}\} \subset A$$

tersinir elemanların kümesinin A 'daki çarpmaya göre bir grup olduğu aşıkardır. Bir $a \in A$ elemanının **spektrumu**

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)\}$$

olarak tanımlanır. Tersinir elemanlarla ilgili aşağıdaki gözlem sonuçları bakımından çok önemlidir:

Teorem 1. (Neumann Serisi)

A birimli Banach cebri olsun ve $1 \in A$, A 'nın birimi olsun. Ayrıca $a \in A$ olsun. Eğer $\|a\| < 1$ ise

$1 - a \in \mathcal{G}(A)$ 'dır, yani tersinirdir ve tersi de

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n,$$

$a^0 := 1$ olmak üzere, bir kuvvet serisi ile verilir.

Kanıt. Her $N \in \mathbb{N}$ için

$$1 - a^{N+1} = (1 - a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^N) = (1 + a + a^2 + \cdots + a^N)(1 - a)$$

olduğunu görmek zor değildir. Bu durumda $a^0 := 1$ olmak üzere

$$S_N := \sum_{n=0}^N a^n$$

şeklinde tanımlanan $\{S_N\}_{N=1}^{+\infty} \subset A$ dizisinin A 'da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim: $N, M \in \mathbb{N}$ ve $N > M$ olsun, o hâlde

$$\begin{aligned} \|S_N - S_M\| &= \left\| \sum_{n=M+1}^N a^n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|a^n\| \leq \sum_{n=M+1}^N (\|a\|)^n \\ &= \|a\|^{M+1} \sum_{n=0}^{N-M-1} \|a\|^n \end{aligned}$$

ve $\|a\| < 1$ iken

$$\sum_{n=0}^{N-M-1} \|a\|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|}$$

olduğundan

$$\|S_N - S_M\| \leq \frac{\|a\|^{M+1}}{1 - \|a\|}$$

elde edilir ki bu da

$$\|S_N - S_M\| \rightarrow 0, \quad N, M \rightarrow +\infty$$

olması, yani $\{S_N\}_{N=1}^{+\infty} \subset A$ dizisinin Cauchy dizisi olması demektir. Burada A bir Banach uzayı olduğundan $\{S_N\}_{N=1}^{+\infty} \subset A$ dizisi yakınsaktır, $\lim S_N := y \in A$ olsun. O hâlde $\lim 1 - a^{N+1} = 1$ olduğundan

$$(1 - a)y = y(1 - a) = 1$$

sağlanır. □

Bu teoremin bir diğer ifadesi de eğer $\|1 - a\| < 1$ ise $a \in \mathcal{G}(A)$ 'dır, yani a tersinirdir, şeklindedir. Yani $B(1, 1) := \{a \in A : \|1 - a\| < 1\} \subset \mathcal{G}(A)$ dır. Bunun bir sonucu olarak, $\mathcal{G}(A)$ 'nın çarpma işlemine göre bir grup olduğu gözönüne alındığında, $\mathcal{G}(A)$ 'nın A 'nın açık bir altkümesi olduğu elde edilir:

Önerme 1.

A birimli bir Banach cebri ve $\mathcal{G}(A) := \{a \in A : a \text{ tersinirdir}\}$ olsun. O hâlde $\mathcal{G}(A) \subset A$ 'nın açık bir altkümesidir.

Kanıt. $a \in \mathcal{G}(A)$ olsun. Ayrıca $b \in B(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}) := \{b \in A : \|b - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}\}$ olsun. O hâlde $a^{-1}(b - a) = a^{-1}b - 1$ olduğundan $\|b - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ ise

$$\|1 - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(b - a)\| \leq \|a^{-1}\| \|b - a\| < \|a^{-1}\| \frac{1}{\|a^{-1}\|} = 1$$

olur ki bu da $a^{-1}b \in \mathcal{G}(A)$ olması demektir. Yani $\|b - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ ise $a^{-1}b \in \mathcal{G}(A)$ dır. Burada $\mathcal{G}(A)$ çarpma işlemine göre bir grup olduğundan $\|b - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ ise $a^{-1}b \in \mathcal{G}(A)$ ve $a \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow a(a^{-1}b) = b \in \mathcal{G}(A)$ olur, yani $a \in \mathcal{G}(A)$ ise $B(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}) \subset \mathcal{G}(A)$ olduğundan $\mathcal{G}(A) \subset A$ 'nın açık bir altkümesidir. $\square$

Önerme 1'in bir sonucu da spektrum $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ kümesinin tümleyeni olarak tanımlanan $\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ **resolvent kümesinin** açık olması, dolayısıyla $\sigma(a)$ 'nın her zaman kapalı bir küme olmasıdır: $\lambda_0 \in \rho(a)$ $\rho(a)$ 'nın herhangi bir elemanı olsun, o hâlde $\lambda_0 1 - a \in \mathcal{G}(A)$ sağlanır. Burada $\mathcal{G}(A) \subset A$ açık olduğundan bir $\delta > 0$ vardır ki $B(\lambda_0 1 - a, \delta) := \{b \in A : \|b - (\lambda_0 1 - a)\| < \delta\} \subset \mathcal{G}(A)$ sağlanır. Bu durumda $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ ise $\|(\lambda 1 - a) - (\lambda_0 1 - a)\| = |\lambda - \lambda_0| < \delta$ olduğundan $\lambda 1 - a \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ sağlanır. Dolayısıyla $D(\lambda_0, \delta) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \delta\} \subset \rho(a)$ sağlanır ki bu da $\rho(a) \subset \mathbb{C}$ 'nin açık ve $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ 'nin kapalı olması demektir. Aynı şekilde $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ 'nin sınırlı olduğunu ve hatta $\sigma(a) \subset \overline{D(0, \|a\|)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\}$ olduğunu gösterebiliriz: $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda| > \|a\|$ olsun. O hâlde $\lambda 1 - a = \lambda(1 - \frac{a}{\lambda})$ ve $\|\frac{a}{\lambda}\| < 1$ olduğundan $1 - \frac{a}{\lambda} \in \mathcal{G}(A)$ olur. Aynı zamanda $\lambda \neq 0$ olduğundan $\lambda(1 - \frac{a}{\lambda}) = \lambda 1 - a \in \mathcal{G}(A)$ olur, yani $|\lambda| > \|a\|$ ise $\lambda 1 - a \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(a)$ olur. Bu da $\lambda \in \sigma(a)$ ise $|\lambda| \leq \|a\|$ olmasına denktir. Sonuç olarak $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ her zaman kapalı ve sınırlı, dolayısıyla tıkHz bir kümedir.

Tersinir elemanların kümesinin açık olmasına paralel olarak ters alma işlemi de $\bullet^{-1} : \mathcal{G}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ fonksiyonu olarak düşünüldüğünde olabildiğince düzgün bir fonksiyon olduğu, hatta analitik olduğu görülür: $x_0 \in \mathcal{G}(A)$ ve $x \in B(x_0, \frac{1}{\|x_0^{-1}\|})$ olsun, bu durumda $\|1 - x_0^{-1}x\| < 1$ olduğundan

$$(x_0^{-1}x)^{-1} = x^{-1}x_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - x_0^{-1}x)^n \Rightarrow x^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - x_0^{-1}x)^n x_0^{-1}$$

olarak bulunur yani x^{-1}, x^n 'lerin, $n \in \mathbb{N}$, bir serisi olarak yani bir kuvvet serisi olarak ifade edilebilir. Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda| > \|a\|$ iken

$$f(\lambda) := (\lambda 1 - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \rightarrow A$ fonksiyonunun analitik olduğu görülür. Burada analitikten kasıt fonksiyonun λ 'nın bir kuvvet serisi olarak yazılabilmesidir. Bunu bildiğimiz klasik anlamda analitik fonksiyon olarak görebilmemiz için f fonksiyonunun herhangi bir $\phi \in A'$ doğrusal sınırlı fonksiyoneli ile bileşkesi olan F fonksiyonuna bakarız: $F : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(\lambda) := \phi((\lambda 1 - a)^{-1}) = \phi\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi(a^n)}{\lambda^n}$$

Bu F fonksiyonunun analitik olduğu açıktır ve $|\lambda|$ büyüdükçe $|F(\lambda)|$ 'nin 0'a yaklaştığı görülür. Yani bu analitik fonksiyonun bütün $\mathbb{C}$ 'ye analitik olarak genişleyememesi gerekir, eğer genişlerse her yerde 0 olması gerekir ki bu mümkün değildir. Bu F fonksiyonunun bütün $\mathbb{C}$ 'ye analitik olarak genişlemesi $\sigma(a) = \emptyset$ olması durumunda mümkündür ki buradan Gelfand'ın $\sigma(a) \neq \emptyset$ olduğunu söyleyen teoremi elde edilir:

Teorem 2.

A birimli bir Banach cebri ve $a \in A$ olsun. O hâlde $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Kanıt. Varsayalım ki $\sigma(a) = \emptyset$ olsun ve $\phi \in A'$ doğrusal sınırlı bir fonksiyonel olsun. Yukarıdaki gibi $F : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$F(\lambda) := \phi((\lambda 1 - a)^{-1}) = \phi\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi(a^n)}{\lambda^n}$$

fonksiyonuna bakalım. Burada $\sigma(a) = \emptyset$ olduğundan $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu bütün $\mathbb{C}$ 'de analitik bir fonksiyondur. Şimdi $|\lambda| > 2\|a\|$ olsun. O hâlde $\left\|\frac{a}{\lambda}\right\| < \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\left\|\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right)\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{|\lambda|}$$

olur ki bu durumda

$$|F(\lambda)| = \frac{1}{|\lambda|} \left| \phi\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right) \right| \leq \frac{2\|\phi\|}{|\lambda|}$$

elde edilir. Bu da $|\lambda| > 2\|a\|$ iken $F(\lambda)$ 'nin sınırlı olduğunu ve hatta

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} |F(\lambda)| = 0$$

olduğunu verir. Bu durumda F bütün $\mathbb{C}$ 'de analitik olduğundan süreklidir, dolayısıyla $\overline{D(0, 2\|a\|)} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2\|a\|\}$ üzerinde de sınırlıdır. O hâlde F bütün $\mathbb{C}$ 'de analitik ve sınırlı bir fonksiyondur ve bütün $\mathbb{C}$ 'de analitik ve sınırlı bir fonksiyonun sabit olması gerektiğini söyleyen Liouville teoremine göre F sabit olmalıdır, F sonsuzda 0 olduğundan bu sabit de 0 olmalıdır. Burada $\phi \in A'$ keyfi olduğundan $F(\lambda) = \phi((\lambda 1 - a)^{-1}) = 0$ ise Hahn-Banach teoremi gereği $(\lambda 1 - a)^{-1} = 0_A$ olmalıdır ki bu da bir çelişki doğurur, zira A 'nın toplamaya göre birim elemanı 0_A hiçbir zaman tersinir olamaz. Bu çelişki $\sigma(a) = \emptyset$ varsayımımızdan kaynaklandığı için $\sigma(a) \neq \emptyset$ olmalıdır. $\square$

Teorem 2'nin çok önemli bir sonucu da birimli bir Banach cebri aynı zamanda bir bölüm halkası ise yani her sıfır olmayan eleman tersinir ise bu Banach cebrinin $\mathbb{C}$ ile aynı olması gerektiğini söyleyen Gelfand-Mazur Teoremidir:

Teorem 3. (Gelfand-Mazur Teoremi)

A birimli bir Banach cebri olsun öyle ki aynı zamanda bir bölüm halkası olsun, yani $a \in A$ ve $a \neq 0_A$ ise $a \in \mathcal{G}(A)$ olsun. O hâlde $A = \mathbb{C}1_A := \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$ dir.

Kanıt. Herhangi bir $a \in A$ alalım. Teorem 2 gereği $\sigma(a) \neq \emptyset$ olduğundan bir $\lambda \in \sigma(a)$ vardır ki bu da $\lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ demektir. Burada A bölüm halkası olduğundan bu da $\lambda 1 - a = 0_A \Rightarrow a = \lambda 1$ olmasını gerektirir. $\square$

Spektrumla ilgili önemli bir özellik de polinomlar altında değişmez kalmasıdır, yani bir $a \in A$ elemanını bir $p(\lambda) := \sum_{j=0}^n c_j \lambda^j$ polinomunun içerisine koyarak elde ettiğimiz $p(a) = \sum_{j=0}^n c_j a^j$, $a^0 := 1$ elemanının spektrumu $\sigma(p(a))$, $\sigma(a)$ 'nın p altındaki görüntüsü $p(\sigma(a))$ ile aynıdır. Bu özelliğe “Spektral Gönderim Teoremi” (İng. Spectral Mapping Theorem) denir:

Teorem 4. (Spektral Gönderim Teoremi)

A birimli bir Banach cebri ve $p(\lambda) := \sum_{j=0}^n c_j \lambda^j$ bir polinom olsun. O hâlde $p(a) := \sum_{j=0}^n c_j a^j$, $a^0 = 1$ için

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$$

sağlanır.

Kanıt. $\mu \in \sigma(p(a))$ olsun. Ayrıca $q(\lambda) := \mu - p(\lambda)$ olsun. Cebirin temel teoremi gereği $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \neq 0$ vardır ki

$$q(\lambda) = \lambda_0(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

sağlanır. Burada $q(a) := \mu 1 - p(a) \notin \mathcal{G}(A)$ olduğundan ve

$$q(a) = \lambda_0(\lambda_1 1 - a)(\lambda_2 1 - a) \cdots (\lambda_n 1 - a)$$

olduğundan bir $j \in \{1, \dots, n\}$ için $\lambda_j 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ olmalıdır. Bu da $\lambda_j \in \sigma(a)$ olmasını gerektirir. Ayrıca $q(\lambda_j) = \mu - p(\lambda_j) = 0$ olduğundan $\mu = p(\lambda_j)$ ve $\lambda_j \in \sigma(a) \Rightarrow \mu \in p(\sigma(a))$.

$\mu \in p(\sigma(a))$ olsun. Yine $q(\lambda) := \mu - p(\lambda)$ olsun. Yine

$$q(\lambda) = \lambda_0(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

olduğundan bir $j \in \{1, \dots, n\}$ vardır ki $\lambda_j \in \sigma(a)$ sağlanır. Aynı şekilde

$$q(a) = \mu 1 - p(a) = \lambda_0(\lambda_1 1 - a) \cdots (\lambda_n 1 - a)$$

olduğundan $q(a) = \mu 1 - p(a) \notin \mathcal{G}(A)$ olmalıdır, zira eğer $q(a) \in \mathcal{G}(A)$ olsaydı her $j \in \{1, \dots, n\}$ için $\lambda_j 1 - a \in \mathcal{G}(A)$ olurdu. Bu durumda $\mu \in \sigma(p(a))$ olur. $\square$

Bir $a \in A$ elemanının **spektral yarıçapı** $r(a)$:

$$r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

olarak tanımlanır. Burada $\sigma(a) \subset \overline{D(0, \|a\|)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\}$ olduğundan her $a \in A$ için $r(a) \leq \|a\|$ sağlanır. Spektral yarıçapı a 'nın normu $\|a\|$ 'ya bağlayan Beurling'in spektral yarıçap formülü aşağıdaki gibidir:

Teorem 5. (Beurling Spektral Yarıçap Formülü)

A birimli bir Banach cebri ve $a \in A$ olsun. O hâlde

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

sağlanır.

Kanıt. $\lambda \in \sigma(a)$ olsun. O hâlde Spektral Gönderim Teoremi gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ sağlanır. Aynı zamanda $\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$ olduğundan

$$|\lambda^n| = |\lambda|^n \leq \|a^n\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sağlanır. Burada $\lambda \in \sigma(a)$ keyfi olduğundan

$$r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow r(a) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

sağlanır.

$\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda| > r(a)$ olsun. O hâlde $\lambda' := \frac{1}{\lambda}$ için $|\lambda'| < \frac{1}{r(a)}$ ve $1 - \lambda' a \in \mathcal{G}(A)$ sağlanır. Burada $\phi \in A'$ totalım ve $f : D(0, \frac{1}{r(a)}) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) := \phi((1 - za)^{-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(a^n) z^n$$

analitik fonksiyonuna bakalım: Bu fonksiyonun kuvvet serisi her $z \in D(0, \frac{1}{r(a)})$ için yakınsak olduğundan her $\phi \in A'$ ve $z \in D(0, \frac{1}{r(a)})$ için $\{\phi(z^n a^n)\}_{n=0}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ dizisi $\mathbb{C}$ 'de sınırlıdır. O hâlde düzgün sınırlılık prensibi gereği $\{\|z^n a^n\|\}_{n=0}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^+$ dizisi de sınırlıdır. Bu da bir $M > 0$ için $|z| < \frac{1}{r(a)}$ iken

$$\|z^n a^n\| = |z|^n \|a^n\| < M \Rightarrow |z| \|a^n\|^{\frac{1}{n}} < M^{\frac{1}{n}}$$

olmasını gerektirir ki burada $n \in \mathbb{N}$ üzerinden limit alındığında

$$\frac{1}{|z|} > r(a) \Rightarrow \frac{1}{|z|} > \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

elde edilir ki bu da

$$r(a) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

olması demektir. □

4. İDEALLER VE GELFAND DÖNÜŞÜMÜ

A birimli bir Banach cebri olsun. Bir $I \subset A$ altuzayı eğer $a \in A$, $x \in I$ iken $ax \in I$ şartını sağlıyorsa $I \subset A$ 'ya A 'nın bir **sol ideali**, $xa \in I$ şartını sağlıyorsa $I \subset A$ 'ya A 'nın bir **sağ ideali**, hem $ax \in I$ hem de $xa \in I$ şartlarını sağlıyorsa $I \subset A$ 'ya A 'nın bir **ideali** denir. Eğer $I \subset A$ ideali $I \neq A$ ve $I \neq \{0_A\}$ şartlarını sağlıyorsa $I \subset A$ 'ya bir **has ideal** denir.

Eğer $I \subset A$ bir has ideal ise $I \neq A$ olduğundan $I \cap \mathcal{G}(A) = \emptyset$ olmalıdır. Ayrıca $B(1, 1) := \{a \in A : \|1 - a\| < 1\} \subset \mathcal{G}(A)$ olduğundan $B(1, 1) \cap I = \emptyset$ olmalıdır. Bu durumda eğer $I \subset A$ bir has ideal ise $\bar{I} \subset A$ da bir has idealdir ($\bar{I}$, I 'nin kapanışını belirtmektedir).

İdeallerin en önemli örnekleri cebir homomorfizmalarının çekirdek uzaylarıdır: A birimli bir Banach cebri ve B bir cebir olsun, bir $\varphi : A \rightarrow B$ doğrusal fonksiyonuna **cebir homomorfizması** denir eğer her $x, y \in A$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ sağlanırsa. Burada $\varphi : A \rightarrow B$ bir cebir homomorfizması iken $\ker(\varphi) := \{x \in A : \varphi(x) = 0_B\}$ çekirdek uzayının A 'nın bir ideali olduğunu görmek zor değildir. Burada $B := \mathbb{C}$ özel durumunda $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ homomorfizmasına bir **karakter** denir. Bir $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ karakterinin, eğer $\phi \neq 0$ ise, otomatik olarak sınırlı olması gerektiğini, hatta $\|\phi\| = 1$ olması gerektiğini görmek zor değildir: Eğer bir $a \in A$ için $|\phi(a)| > \|a\|$ olsa idi $\|\frac{a}{\phi(a)}\| < 1$ olduğundan $1 - \frac{a}{\phi(a)} \in \mathcal{G}(A)$ olurdu ki bu durumda bir $b \in A$ için $(1 - \frac{a}{\phi(a)})b = b(1 - \frac{a}{\phi(a)}) = 1$ olurdu. Fakat bu da $\phi(1 - \frac{a}{\phi(a)}) = 0$ olduğundan $\phi((1 - \frac{a}{\phi(a)})b) = \phi(1 - \frac{a}{\phi(a)})\phi(b) = \phi(1) = 1 = 0\phi(b) = 0$ gibi bir çelişkiye yol açardı. O hâlde her $a \in A$ için $|\phi(a)| \leq \|a\|$ olmalıdır ki $\phi(1) = 1$ olduğundan $\|\phi\| = 1$ olmalıdır.

Bir $I \subset A$ has ideali başka hiçbir has idealin içerisine girmiyorsa yani bir $J \subset A$ ideali için $J \supseteq I$ iken $J = I$ veya $J = A$ oluyorsa bu $I \subset A$ idealine A 'nın bir **maksimal ideali** denir. Zorn lemması kullanılarak her $I \subset A$ idealinin bir maksimal idealin içerisine girmesi gerektiği gösterilebilir. Ayrıca her has idealin kapanışının da bir has ideal olduğu gözönüne alındığında maksimal ideallerin kapalı olmaları gerektiği kolaylıkla gösterilebilir.

Eğer A birimli bir Banach cebri ve $I \subset A$ onun bir ideali ise $q : A \rightarrow A/I$ bölüm fonksiyonu (İng. quotient map) vasıtasıyla A/I bölüm uzayının bütün idealleri ile A 'nın I 'yi içeren idealleri arasında birebir örten bir eşleme kurulur. Bu eşlemeyi kullanarak eğer $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ bir karakter ise ve $\phi \neq 0$ ise $\ker(\phi) := \{a \in A : \phi(a) = 0\} \subset A$ çekirdek uzayının bir maksimal ideal olması gerektiği gösterilir, zira eğer $\phi \neq 0$ ise $\phi(1) = 1$ olduğundan ϕ örtendir. Ayrıca ϕ bir halka homomorfizması olduğundan halka homomorfizmalarının birinci izomorfizma teoremi gereği $A/\ker(\phi)$ bir halka olarak $\mathbb{C}$ 'ye izomorftur. Bu durumda $\mathbb{C}$ bir cisim olduğundan $A/\ker(\phi)$ de bir cisimdir. Dolayısıyla $A/\ker(\phi)$ 'in hiçbir has ideali yoktur ki bu yukarıda bahsettiğimiz eşleme gereği A 'nın $\ker(\phi)$ 'yi içeren hiçbir has idealinin olmaması gerektiğini gösterir ki bu da $\ker(\phi)$ 'in bir maksimal ideal olması demektir.

Eğer A bir Banach cebri ve $I \subset A$ kapalı bir ideal ise A/I bölüm uzayı da bölüm normu $\|\cdot\|_q$,

$$\|a + I\|_q := \inf\{\|a - x\| : x \in I\}$$

ile bir Banach uzayıdır. Aynı zamanda

$$(a + I)(b + I) := ab + I$$

şeklinde tanımlanan çarpım iyi tanımlı bir halka çarpımıdır. Bu çarpım işlemi ve bölüm normu ile A/I bölüm uzayı bir Banach cebri olur:

Önerme 2.

A bir Banach cebri ve $I \subset A$ kapalı bir ideal olsun. O hâlde A/I bölüm uzayı, bölüm normu ile bir Banach cebridir.

Kanıt. Burada gösterilmesi gereken tek şey

$$\|ab + I\|_q \leq \|a + I\|_q \|b + I\|_q \quad \forall a, b \in A$$

olduğudur: $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun, bölüm normunun tanımı gereği $x, y \in I$ vardır ki

$$\varepsilon + \|a + I\|_q > \|a + x\|, \quad \varepsilon + \|b + I\|_q > \|b + y\|$$

sağlanır. Bu durumda $ay + bx + xy \in I$ olduğundan ve

$$\begin{aligned} \|ab + I\|_q &\leq \|(a + x)(b + y)\| = \|ab + (ay + bx + xy)\| \\ &\leq \|a + x\| \|b + y\| < (\varepsilon + \|a + I\|_q)(\varepsilon + \|b + I\|_q) \end{aligned}$$

olduğundan $\varepsilon \rightarrow 0^+$ alınarak

$$\|ab + I\|_q \leq \|a + I\|_q \|b + I\|_q$$

elde edilir. □

A birimli bir Banach cebri ve $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ bir karakter iken $\ker(\phi) := \{a \in A : \phi(a) = 0\} \subset A$ 'nın bir maksimal ideal olduğunu gördük. Tersine olarak herhangi bir maksimal idealin bir karakterin çekirdek uzayı olması eğer A değişmeli ise mümkündür. Yani A değişmeli ve birimli bir Banach cebri ve $I \subset A$, A 'nın bir maksimal ideali ise bir $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ karakteri vardır ki $I = \ker(\phi) := \{a \in A : \phi(a) = 0\}$ olur: A birimli ve değişmeli bir halka ve $I \subset A$ bir maksimal ideal olduğundan dolayı A/I bölüm uzayı bir cisimdir. Bu durumda Gelfand Mazur Teoremi gereği $A/I, \mathbb{C}$ 'ye izometrik izomorf olmalıdır, yani bir $\psi : A/I \rightarrow \mathbb{C}$ izometrik izomorfizması vardır. Aynı zamanda $q : A \rightarrow A/I$ bölüm fonksiyonu $q(a) := a + I$ bir homomorfizma olduğundan $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}, \phi := \psi \circ q$ bir karakterdir ve $I = \ker(\phi)$ sağlanır.

Bir A birimli Banach cebri üzerindeki bütün karakterlerin kümesine A' dual uzayının üzerinden noktasal yakınsamayı koruyan en kaba topoloji olan **zayıf *** topolojisi konur, yani

$$M_A := \{\phi \in A' : \phi \text{ bir karakterdir ve } \phi \neq 0\}$$

iken $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset M_A$ neti için $\phi_\alpha \rightarrow \phi \in M_A$ ancak ve ancak her $a \in A$ için $\phi_\alpha(a) \rightarrow \phi(a)$ sağlanır. Bu topolojiyle $M_A \subset A'$ tıkHz Hausdorff bir topolojik uzay olur. Bu uzaya **karakter uzayı** denir, eğer A değişmeli ise karakterlerin çekirdek uzayları ile maksimal idealler aynı olduklarından dolayı **maksimal ideal uzayı** denir.

Önerme 3.

*A birimli bir Banach cebri olsun. O hâlde $(M_A, w *)$ karakter uzayı zayıf * topolojisi ile tıkHz Hausdorff bir topolojik uzaydır.*

Kanıt. Alaoğlu Bourbaki teoremi gereği $\mathbb{B}_{A'} := \{\phi \in A' : \|\phi\| = 1\} \subset A'$ zayıf * topolojisiyle tıkHz Hausdorff bir topolojik uzaydır. Bu durumda M_A 'nın da tıkHz Hausdorff olduğunu göstermek için $M_A \subset \mathbb{B}_{A'}$ 'de kapalı olduğunu göstermek yeterlidir: $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset M_A$ bir net olsun öyle ki $\phi_\alpha \rightarrow \phi \in A'$ zayıf * yakınsasın. Bu durumda $a, b \in A$ ve her $\alpha \in J$ için $\phi_\alpha(ab) = \phi_\alpha(a)\phi_\alpha(b)$ olduğundan $\phi_\alpha(ab) \rightarrow \phi(ab)$ ve $\phi_\alpha(a)\phi_\alpha(b) \rightarrow \phi(a)\phi(b)$ olduğundan $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ olmalıdır, yani $\phi \in M_A$ 'dır. □

Maksimal ideal uzayı ile spektrum arasındaki ilişki A değişmeli iken tam olarak ortaya çıkar:

Önerme 4.

A birimli ve değişmeli bir Banach cebri olsun. O hâlde $a \in A$ iken

$$\sigma(a) = \{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\}$$

sağlanır.

Kanıt. $\{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\} \subseteq \sigma(a)$:

$\lambda \in \{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\}$ olsun, o hâlde bir $\phi \in M_A$ vardır ki $\lambda = \phi(a)$ sağlanır. Eğer $x \in \mathcal{G}(A)$ ise her $\phi \in M_A$ için $\phi(x) \neq 0$ olduğu açıktır zira eğer bir $\phi \in M_A$ için $\phi(x) = 0$ ise $\phi(x^{-1}x) = \phi(1) = 1 = \phi(x^{-1})\phi(x) = \phi(x^{-1})0 = 0$ olur ki bu çelişki her $\phi \in M_A$ için $\phi(x) \neq 0$ olduğunu gösterir. Bu durumda $\phi(\lambda 1 - a) = \lambda - \phi(a) = 0$ olduğundan $\lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ ve dolayısıyla $\lambda \in \sigma(a)$ olmalıdır. (Bu kısmın ispatında A 'nın değişmeli olduğuna hiç değinilmemiş olması dikkate değerdir.)

$\sigma(a) \subseteq \{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\}$:

$\lambda \in \sigma(a)$ olsun. O hâlde $\lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ sağlanır. Bu durumda $I = (\lambda 1 - a)A := \{(\lambda 1 - a)x : x \in A\} \subset A$, A değişmeli olduğundan A 'nın bir has idealidir. Her has ideal bir maksimal ideal tarafından içerildiğinden dolayı bir $J \subset A$ maksimal ideali vardır ki $I = (\lambda 1 - a)A \subseteq J$ sağlanır. Yine A değişmeli olduğundan A 'daki her maksimal ideal bir $\phi \in M_A$ karakterinin çekirdek uzayıdır, yani $J = \ker(\phi)$ dır. Bu durumda $\lambda 1 - a \in J$ olduğundan $\phi(\lambda 1 - a) = \lambda - \phi(a) = 0$ sağlanır, yani bir $\phi \in M_A$ için $\lambda = \phi(a)$ 'dır. $\square$

Şimdi Gelfand dönüşümünün tanımını vermeye hazırız: A birimli ve değişmeli bir Banach cebri ise M_A zayıf $*$ topolojisiyle tıkHz Hausdorff bir topolojik uzaydır, $C(M_A) : \{f : M_A \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ sürekli}\}$ sürekli fonksiyonlar cebri noktasal toplam, noktasal çarpım işlemleri ve

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in M_A\}$$

normu ile bir Banach cebridir. Bu iki cebir A ve $C(M_A)$ arasında A 'yı $C(M_A)$ 'ya götüren doğal bir cebir homomorfizması

$$\Gamma : A \rightarrow C(M_A) \quad \Gamma(a)(\phi) = \hat{a}(\phi) := \phi(a)$$

şeklinde tanımlanır. Bu Γ cebir homomorfizmasına **Gelfand Dönüşümü** denir. Gelfand dönüşümünün sınırlı olduğu ve hatta

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a) \leq \|a\| \quad \forall a \in A$$

şartının sağlandığını görmek zor değildir, zira Önerme 4 gereği

$$\{\Gamma(a)(\phi) : \phi \in M_A\} = \{\phi(a) : \phi \in M_A\} = \sigma(a)$$

olduğundan $\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a)$ sağlanır.

5. C^* -CEBİRLERİ VE GELFAND NAIMARK TEOREMİ

Bir A Banach cebri üzerinde (i) her $a, b \in A$ için $(a + b)^* = a^* + b^*$, (ii) her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $a \in A$ için $(\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^*$, (iii) her $a, b \in A$ için $(ab)^* = b^*a^*$ ve (iv) her $a \in A$ için $(a^*)^* = a$ şartlarını sağlayan bir $*$: $A \rightarrow A$ involüsyonu varsa A 'ya bir **Banach^{*} cebri** denir. Bir Banach^{*} cebri A ,

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A$$

şartını sağlıyorsa, A 'ya bir C^* -ceбри denir. Bir C^* -cebrinin en prototipik örneği H bir Hilbert uzayı olmak üzere

$$B(H) := \{T : H \rightarrow H : T \text{ doğrusal ve sınırlı}\}$$

doğrusal sınırlı operatörler uzayıdır. Buradaki involüsyon bildiğimiz eşlenik almadır yani

$$\langle Tf, g \rangle_H = \langle f, T^*g \rangle_H \quad \forall f, g \in H$$

şartını sağlayan biricik T^* operatörüdür. Ayrıca $\|a^*a\| = \|a\|^2$ aksiyomu

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \quad \forall T \in B(H)$$

olmasından gelmektedir.

Bir C^* -cebri A 'nın birtakım özel elemanları önem kazanmaktadırlar: (i) $a \in A$, $a^* = a$ şartını sağlıyorsa $a \in A$ 'ya **kendine eşlenik** (İng. self adjoint) denir. (ii) $a \in A$, $a^*a = aa^*$ şartını sağlıyorsa $a \in A$ 'ya **normal** denir. Eğer A birimli ise ve $a \in A$, $a^*a = aa^* = 1$ şartını sağlıyorsa $a \in A$ 'ya **birimsel** (İng. unitary) denir.

Bir A C^* -cebrinde $a \in A$ iken $\|a^*a\| = \|a\|^2$ aksiyomu $(a^*)^* = a$ aksiyomu ile birlikte $\|a^*\| = \|a\|$ olması gerektiğini verir zira $\|a^*a\| = \|a\|^2 \leq \|a^*\| \|a\|$ olduğundan $\|a\| \leq \|a^*\|$ olduğu görülür.

Eğer bir C^* -cebri A birimli değilse birimleştirilmesi Banach cebirlerinde yaptığımız gibi $\tilde{A} := \mathbb{C} \oplus A$ olarak yapılır, fakat dikkat edilmesi gereken nokta $(\lambda, a) \in \tilde{A}$ için

$$\|(\lambda, a)\| := |\lambda| + \|a\|_A$$

normu C^* -cebrlerinin $\|a^*a\| = \|a\|^2$ norm aksiyomunu sağlamaz. Onun yerine $\iota : A \hookrightarrow B(A)$, $\iota(a) := M_a$ gömmesinin izometrik olduğu görülür, zira $x := \frac{a^*}{\|a\|}$ için

$$M_ax = \frac{aa^*}{\|a\|}, \quad \|aa^*\| = \|(a^*a)^*\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

olduğundan her $a \in A$ için $\|M_a\| = \|a\|$ sağlanır. Bu $\iota : A \hookrightarrow B(A)$, $\iota(a) := M_a$ gömmesinden gelen norm

$$\|(\lambda, a)\| := \sup\{\|\lambda x + ax\|_A : \|x\|_A \leq 1\}$$

ile $\tilde{A} := \mathbb{C} \oplus A$ birimli bir C^* -cebri olur ve $\iota(a) := (0, a)$, A 'nın $\tilde{A}$ içerisine izometrik bir gömmesidir.

Birimli bir A C^* -cebrinde kendine eşlenik elemanları birimsel elemanlara gönderen üstel fonksiyon sıklıkla kullanılır: $\exp : A \rightarrow A$,

$$\exp(a) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}, \quad a^0 = 1$$

fonksiyonu iyi tanımlı bir fonksiyon olup bu fonksiyona üstel fonksiyon denir. Klasik kalkülüste gördüğümüz e^x fonksiyonunun Banach cebirlerindeki tam karşılığı olan bu fonksiyon $a, b \in A$ için $ab = ba$ ise

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

özdeşliğini sağlar. Ayrıca involüsyon A üzerinde sürekli olduğundan

$$(\exp(a))^* = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right)^* = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a^*)^k}{k!} = \exp(a^*) \quad \forall a \in A$$

sağlanır. Bu durumda $a \in A$ kendine eşlenik ise $(ia)^*(ia) = (ia)^*(ia)$ ve $(ia)^* = -ia$ olduğundan

$$\begin{aligned} \exp(ia)^* \exp(ia) &= \exp((ia)^*) \exp(ia) = \exp(-ia) \exp(ia) = \exp(ia - ia) \\ &= \exp(0_A) = 1 = \exp(ia) \exp(ia)^* \end{aligned}$$

sağlanır, yani $\exp(ia)$ birimseldir. Eğer $a \in A$ birimsel ise $\|a^*a\| = \|1\| = \|a\|^2 = 1$ olduğundan $\|a\| = 1$ olmalıdır. Ayrıca $r(a) \leq \|a\|$ olduğundan eğer $\lambda \in \sigma(a)$ ise $|\lambda| \leq 1$ olmalıdır. Aynı zamanda $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(a^{-1})$ olduğundan ve $a^{-1} \in A$ da birimsel olduğundan $|\lambda| \geq 1$ olmalıdır. Sonuç olarak $a \in A$ birimsel ise $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ olmalıdır. Eğer $\lambda \in \sigma(a)$ ise $e^{i\lambda} \in \sigma(\exp(ia))$ olduğunu görmek de zor değildir:

$$e^{i\lambda} 1 - \exp(ia) = e^{i\lambda} (1 - e^{-i\lambda} e^{ia}) = e^{i\lambda} (1 - e^{-i(\lambda 1 - a)})$$

$$= e^{i\lambda}(\lambda 1 - a) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} -\frac{(-i)^k(\lambda 1 - a)^k}{(k+1)!} \right)$$

olduğundan $\lambda 1 - a \notin \mathcal{G}(A)$ ise $e^{i\lambda} 1 - \exp(ia) \notin \mathcal{G}(A)$ olması gerekir, yani $e^{i\lambda} \in \sigma(\exp(ia))$ dır.

Bütün bunların sonucu olarak eğer A birimli bir C^* -cebri ve $a \in A$ kendine eşlenik ise $\exp(ia)$ birimsel olduğundan, $\lambda \in \sigma(a)$ iken $e^{i\lambda} \in \sigma(\exp(ia)) \subseteq \mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ olur ki bu da $\lambda \in \mathbb{R}$ olmasını gerektirir. Yani $a \in A$ kendine eşlenik ise $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ olmalıdır. Bunun önemli bir sonucu aşağıdadır:

Önerme 5.

A birimli bir C^ -cebri ve $\phi \in M_A$ A üzerinde bir karakter olsun. O hâlde*

$$\phi(a^*) = \overline{\phi(a)} \quad \forall a \in A$$

sağlanır.

Kanıt. $\{\phi(a) \in \mathbb{C} : \phi \in M_A\} \subseteq \sigma(a)$ olduğunu biliyoruz. Bir $a \in A$ verildiğinde onun kendine eşlenik dekompozisyonu

$$b := \frac{a + a^*}{2}, c := \frac{a - a^*}{2i}, \quad a = b + ic$$

şeklinde yapılır ki burada $b, c \in A$ kendine eşlenik elemanlardır. Bu durumda $\phi(b) \in \sigma(b)$ ve $\phi(c) \in \sigma(c)$ olduğundan $\phi(b), \phi(c) \in \mathbb{R}$ olmalıdır. O hâlde

$$\phi(a^*) = \phi((b + ic)^*) = \phi(b - ic) = \phi(b) - i\phi(c) = \overline{\phi(b) + i\phi(c)} = \overline{\phi(b + ic)} = \overline{\phi(a)}$$

sağlanır. □

En sonunda Gelfand Naimark Teoremini ispatlamaya hazırız:

Teorem 6. (Gelfand Naimark Teoremi)

A birimli ve değişmeli bir C^ -cebri olsun. O hâlde $\Gamma : A \rightarrow C(M_A)$*

$$\Gamma(a)(\phi) := \hat{a}(\phi) = \phi(a)$$

Gelfand dönüşümü bir izometrik izomorfizmadır.

Kanıt. Γ bir izometridir: Eğer $a \in A$ kendine eşlenik ise

$$\|a^*a\| = \|a^2\| = \|a\|^2 \Rightarrow \|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

sağlanır. Beurling spektral yarıçap formülünden bu durumda

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|a^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|a\|$$

elde edilir. Eğer $a \in A$ herhangi bir eleman ise $b := a^*a$ kendine eşleniktir, bu durumda

$$\|\Gamma(b)\|_\infty = r(b) = \|b\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

sağlanır ve ayrıca Önerme 5 gereği

$$\begin{aligned} \|\Gamma(b)\|_\infty &= \sup\{|\phi(b)| : \phi \in M_A\} \\ &= \sup\{|\phi(a^*a)| : \phi \in M_A\} = \sup\{|\phi(a)|^2 : \phi \in M_A\} = \|\Gamma(a)\|_\infty^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \|a\|$$

sağlanır.

$\Gamma(A) = C(M_A)$ olduğunu göstererek ispatımızı bitirelim: $\Gamma(A) \subset C(M_A)$ 'nın bir altceabri olduğu açıktır. Bu altcebir $\Gamma(1) \equiv 1$ sağlandığından sabitleri içerir, ayrıca

$$\Gamma(a^*)(\phi) = \phi(a^*) = \overline{\phi(a)} = \overline{\Gamma(a)(\phi)} \quad \forall \phi \in M_A$$

olduğundan $\Gamma(A)$ kompleks konjügasyonu korur. Eğer $\phi_1, \phi_2 \in M_A$, $\phi_1 \neq \phi_2$ ise bir $a \in A$ vardır ki $\Gamma(a)(\phi_1) = \phi_1(a) \neq \phi_2(a) = \Gamma(a)(\phi_2)$ olduğundan $\Gamma(A)$, M_A 'nın noktalarını ayırır. Bu durumda Stone Weierstrass teoremi gereği $\Gamma(A) \subseteq C(M_A)$ 'da yoğundur, aynı zamanda Γ izometri olduğundan ve A bir Banach uzayı olduğundan, $\Gamma(A) \subseteq C(M_A)$ 'da kapalıdır. Sonuç olarak $\Gamma(A) \subseteq C(M_A)$ 'da hem yoğun hem de kapalı olduğundan $\Gamma(A) = C(M_A)$ olmalıdır. $\square$

■ Kaynaklar

- [1] **Murphy, G. J.** C^* -Algebras and Operator Theory, Academic Press 1990.
- [2] **Zelazko, W.** Banach Algebras, Elsevier 1973.
- [3] **Zhu, K.** An Introduction to Operator Algebras, CRC Press 1993.

Matematik Yapabiliyor (muy)um!!

NAZAN SEZEN YÜKSEL

Hacettepe Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

✉ nsezen@hacettepe.edu.tr



Haydi, öğrencilik zamanlarımızdan çok bilindik bir tablo ile başlayalım:

Sınava girdiniz, sorulara bir göz attıktan sonra en tanıdık soruya yönelerek başlamaya karar verdiniz. Bu sorudaki konuyu tanıyorsunuz, çözüme nasıl başlayacağınızı da biliyorsunuz. Ancak... Kaleminiz havada asılı kalıyor. Düşünceleriniz sıraya girmiyor ve kaleminizden dökülmüyor. Zaman geçtikçe zihin de daralmaya başlıyor ve olmuyor. Sınavdan çıktığınızda tanıdık bir cümle dökülüyor ağzınızdan “Aslında biliyordum!”

Bu deneyim, yaşanan tüm bu duygular öğrenim seviyesi fark etmeksizin matematikle karşılaşan herkes için tanıdık. Peki bir sorunun yapılamaması gerçekten bizler için ne ifade etmektedir?

Bir öğrenciden “Bu soruyu yapamıyorum” cümlesini duyduğumuzda çoğunlukla bu durumu bilgi eksikliği ile ilişkilendiririz. Oysa matematikte yapamamak çoğu zaman bilmemekle aynı anlama gelmez. Matematiksel bir problemin çözülmesi

- Bilginin hatırlanmasını
- Hatırlanan bilgilerin uygun sırayla düzenlenmesini
- Doğru temsillerin seçilmesini
- Tüm bunların sınırlı bir zaman içinde yapılmasını

gerektirir. Bu süreçlerin herhangi birinde yaşanan aksama, problemi başarılı bir şekilde çözme sürecini doğrudan etkiler. O halde matematikte yaşanan başarısızlığın bilginin yokluğundan değil, etkin bir biçimde kullanılamamasından kaynaklandığını söyleyebiliriz.

İşte tam bu durumda matematiksel düşünmenin kırılganlığından bahsetmek çok yerinde olacaktır. “Matematiksel düşünme neden kırılgandır?”. Bir çözüm sürecinin genellikle bir önceki adımın çıktısına, sembolik ifadelerin doğru yorumlanmasına ve dikkat ile sıraya koyma becerisine dayandığını biliyoruz. Bu yapı, matematiksel düşünmenin oldukça kırılgan bir hale gelmesine neden olur. En ufak bir dikkat kayması ya da zihinsel yüklenme zincirin tamamında bozulmaya yol açabilir. Bu nedenle matematiğin bilişsel süreçlerdeki aksaklıkları en hızlı şekilde açığa çıkaran disiplinlerden biri olduğunu söyleyebiliriz.

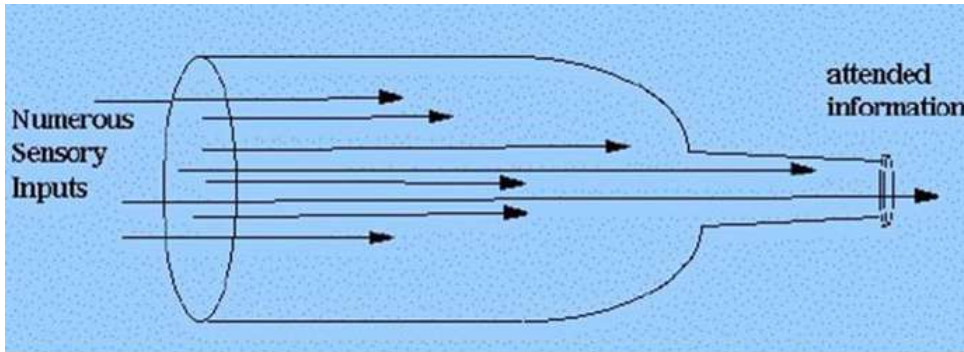
Peki, öğrenme aşamasında bilişsel süreçler nasıl işler? Bunun için bilgi işleme kuramına kısaca değinmek yerinde olacaktır. Belleğimiz üç ana bölümden oluşur: Duyusal Bellek, Kısa Süreli (Çalışan/ İşleyen) Bellek ve Uzun Süreli Bellek.

Bilgiyi işleme sürecinin ilk aşaması duyusal bellektir. *Duyusal bellek*, çevreden alınan bilginin işleme sistemine girmeden önce kısa bir süre tutulduğu bilgi deposudur. Bilginin duyusal kayıta kalış süreci çok kısadır. Bazı kaynaklara göre bilgi duyusal kayıta yarım saniyeden daha az kalmaktadır. Bilginin duyusal kayıta kalış süresi çok sınırlı olmakla birlikte, duyusal kaydın alan olarak kapasitesi sınırsızdır. Bilginin duyusal kayıttan kısa süreli belleğe geçişinde “**Dikkat**” ve “**Seçici Algı**” süreçleri süzgeç görevi yapar. Duyusal kayıttan dikkat ve algı süreçleri sonunda ayrılan bilgi, sistemin ikinci ögesi olan *kısa süreli belleğe*

geçer. Bu belleğin kapasitesi oldukça sınırlıdır. Araştırmalar bu belleğin kapasitesinin 5-9 yeni bilgi birimi (sayı, harf, obje, isim vb.) olduğunu göstermektedir. Kısa süreli belleğin bilgiyi koruma süresi ise yaklaşık **20 saniyedir**. Kısa süreli bellekteki bilgiler etkindir. Bu nedenle anında hatırlanır ve davranışa dönüşebilir. Ancak bu bilgiler, uzun süreli belleğe kodlanmadan araya yeni bilgiler girerse, ya da kodlama için bir çaba gösterilmezse unutulur. *Uzun süreli bellek*, sürekli bellek deposu olarak kabul edilir. Bir bilginin öğrenilmiş kabul edilmesi için mutlaka uzun süreli bellekte depolanmış olması gerekir. Uzun süreli bellekte bilgiler kaybolmaz, ancak bilgi, uygun biçimde kodlanmamış ve uygun yere yerleştirilmemişse, geri getirmede zorluklarla karşılaşılır.

Yukarıda verilen işleyişte en büyük yük şüphesiz ki “Kısa Süreli Bellek” e aittir. Bu durumu “Çalışan Bellek, İşleyen Bellek” gibi iş yüküne işaret eden çeşitli isimlendirmelerden de anlamak mümkündür. Duyusal bellek ile uzun süreli bellek arasındaki transfer sürecini başarıyla gerçekleştirdiği takdirde sıkıntı yaşanmaz ancak ne zaman ki burada işler yolunda gitmez o zaman öğrenme veya öğrenilenleri hayata geçirme süreçleri sekteye uğrar. O halde çalışma belleğinde ortaya çıkabilecek sorunlara daha detaylı değinebiliriz:

Çalışan bellekte yaşanan sıkıntıların başında “Dar Boğaz” olarak tanımlanan bir yapı gelmektedir. Çalışan belleğin kapasitesinin sınırlı olması bu alanda sınırlı sayıda bilgi biriminin işlenmesine veya aktif olarak tutulmasına olanak sağlar. Çoklu görevlerin sıkça kullanıldığı matematiksel düşünme görevleri ise tam da bu kısımda çalışan belleğe ekstra yük getirir. Kapasite kullanımının içinde yalnızca matematiksel görevler yer almaz.



Şekilde (McLeod, 2023) görüldüğü üzere dar boğaz benzetmesi, sistem içerisinde ne kadar geniş ve akıcı şeylerle uğraşırsak uğraşalım, bir sonraki aşamadan tek bir dar noktadan geçmek zorunda kaldığımız durumda akışın o noktaya takılması anlamında kullanılmaktadır. Bu metaforu öğrenme üzerinden derinleştirecek olursak; bir konuda sahip olduğunuz tüm bilgiler uzun süreli bellekte depolanmaktadır ve bu bilgilerinizi gerektiği durumda çalışan belleğe çağırarak işlevsel hale getirebilirsiniz. Zaten kapasitesi sınırlı olan çalışan belleğinize ek olarak başka yükler getirmek sizdeki o engin bilginin işlevselliğinin bozulmasına neden olur. Bu yükler, matematiksel görevi yerine getirirken karşılaştığınız her şey olabilir. Sorun çoğu zaman geçidin varlığı ve darlığı değil; taşıyabileceğinden fazlasının aynı anda yüklenmesidir. Bu durumu bir trafik örneği ile açıklayabiliriz:

Bir köprü hayal edin. Bu köprü sağlam ama dardır ve aynı anda sınırlı sayıda araç geçebilir. Eğer birkaç araç geçmek için sıradaysa sorun yoktur ancak aynı anda köprüden geçmek için çok sayıda araç yığılırsa sorun başlar. Burada köprü bozulmamıştır, araçlar da bozuk değildir ama trafik yükü köprünün kapasitesini aştığı için geçişte aksamalar meydana gelir.



Matematik problemleriyle karşılaşıldığında ortaya çıkan “zaman baskısı, hata yapma düşüncesi, değerlendirilme kaygısı” çalışma belleğinde belli bir alan kaplar. Beilock ve Carr (2005), matematik kaygısının çalışma belleği kaynaklarını “işgal ettiğini” ve problem çözme için kalan alanı daralttığını göstermektedir. Bu durum aslında baskı altında matematiksel düşünme görevlerinin sekteye uğramasının en önemli açıklamasıdır. Kaygı kavramını daha sonraya bırakarak öncelikle bilişsel görevler üzerinden gidelim. Dar boğaz ifadesi geçidin genişliğini ifade ederken, o geçitten geçmeye çalışan yük miktarı olarak “Bilişsel Yük” kavramı ortaya çıkmaktadır.

Bilişsel yük teorisi John Sweller ve arkadaşları tarafından 1980’lerde ortaya çıkmış, son 20 yılda ise öğretim tasarımlarında kendini göstermiştir. Teori, bireylerin bilişsel mekanizmasına odaklanmakla beraber, işleyen belleğin bilgi işleme ve depolaması üzerinde durmaktadır (Janssen, Kirschner, Erkens, Kirschner & Paas, 2010). Bilişsel yük teorisinde işleyen belleğin sınırlı olması göz önünde bulundurularak öğrenme çıktıları tahmin edilir (Plass, Moreno & Brünken, 2010). Burada üç tür bilişsel yükten bahsedebiliriz: Asıl Yük, Dışsal Yük ve Etkili Yük.

Sweller’ a (2010) göre asıl yük öğrenme materyalinin, bilginin ya da görevin doğasından kaynaklı karmaşıklıkla ilgili olan yüküdür. Bildiğimiz üzere matematikte bazı konular diğerlerine nazaran daha yoğun ve korkutucu gelmektedir. Bunun için öğrencilerin kendilerine konuya ilişkin yeni bir yol çizmeleri gerekir. Bu yollar; ön bilgilerle bağdaştırma, basitten karmaşığa doğru bir bilgi ya da görev akışı oluşturma, mevcut görevlerin parçalanması veya çözüm süreçlerini anlamlı parçalara bölmek olabilir. Dışsal yük ise öğrenme materyalinin ya da görevinin biçimsel ya da içerik yönünden uygun olmayan şekilde tasarlanması veya uygulanması sırasında ortaya çıkan yüküdür. Son zamanlarda “yeni nesil sorular” adı altında karşılaştığımız sorular aslında dışsal yüke dikkat çekici bir örnek olarak verilebilir. Bu soru türlerinin içerdiği matematik konusunun doğasından gelen zorluğun yanı sıra soruların geniş (bazen ilgisiz) bağlamda, yersiz uzun ve neredeyse okuma becerilerini matematiksel becerilerin önüne geçirecek şekilde sunulması öğrencilerde dışsal yük oluşmasına neden olmaktadır. Çalışan belleğin aşırı derecede yüklenmesine sebep olan dışsal yük, görevlerin düşük performansla sonuçlanmasına neden olabilmektedir (Hasler, Kersten & Sweller, 2007). Son olarak öğretim sürecinde, öğrenenlerin süreç içerisindeki tüm faaliyetlerinin çalışan belleğe getirdiği yüke etkili yük denir.

O halde bilişsel yükün dengede kalmasının dar boğazdan geçişi kolaylaştıracağına dair yeteri kadar kanıt toplamış oluyoruz. Karşılaştığımız matematiksel duruma ilişkin mevcut bilgilerimizi gözden geçirmek, özetlemek ve bu bilgileri etkin kullanmak adına çeşitli stratejiler üretmemiz gerektiği önemli bir gerçek olarak karşımıza çıkmaktadır. Peki elimizde olmadan dar boğazı sıkıştıran başka bir faktör olduğunu da

biliyoruz: **Kaygı.**

Araştırmalara göre matematik kaygısı yaşayan insanların, sayılarla karşılaştıklarında beyinlerindeki korku merkezleri aktif hale gelmektedir. Bu merkez yılan veya örümcek görünce de harekete geçen merkezdir. Beyindeki korku merkezi aktive olduğunda beynin problem çözme merkezindeki faaliyetler yavaşlamaktadır. Burada duyguların beyni ele geçirmesi söz konusudur. Bir stres durumunda beynimizde ne olur kısaca açıklayalım:

Öncelikle, stres yanıtının merkezi olan amigdalada hiperaktivite görülür. Bu, tehdit algısının sürekli yüksek kalmasına ve duygusal regülasyonda bozulmaya neden olur. Geçmiş deneyimlerinde hedeflediği sonuca ulaşamayan ve kendi davranışlarının sonuç üzerinde etkili olmadığına inanan birey, gelecekte sonucu etkileyebilecek koşullar mevcut olsa dahi bu doğrultuda çaba göstermeme eğiliminde olur. Bu durum öğrenilmiş çaresizliğin tipik göstergesidir. Öğrenilmiş çaresizlik yaşayan bireylerde beynin ilgili bölgelerinin aktivitesinde azalmalar görülür. Bu bölgeler karar verme, planlama ve problem çözme ile ilgilidir. Azalan aktivite, kişinin alternatif çözüm yolları aramada pasif kalmasına neden olur. Motivasyon ve hata izleme ile ilgili bu bölgede aktivite azalır. Birey kendi performansına dair geri bildirim almayı bırakır; “Zaten ne yaparsam yapayım fark etmiyor” düşüncesi hâkim olur.



Görüldüğü üzere stres sadece duygularımızla ilgili bir durum değil, fiziksel aktivitelerimizi doğrudan etkileyen bir faktördür. Peki bu duruma karşı neler yapabiliriz:

- Başarıyı küçük adımlarla görünür kılabiliriz.
- Hataları birer öğrenme fırsatı olarak kazanmayı düşünebiliriz.
- Sonuçtan değil süreçten zevk almayı alışkanlık haline getirebiliriz.
- Stres ve kaygının etkilerinin farkında olarak bu süreci yönetme becerisini kazanmayı hedeflemeliyiz.

O halde en başa dönelim. Evet, o yapamadığınız sorunun çözümünü gerçekten biliyordunuz. Ama artık yaşadığınız bu duruma neyin sebep olduğunu da biliyorsunuz.

■ Kaynaklar

- [1] Beilock, S. L., & Carr, T. H. (2005). When High-Powered People Fail: Working Memory and "Choking Under Pressure" in Math. *Psychological Science*, 16(2), 101–105. <https://doi.org/10.1111/j.0956-7976.2005.00789.x>
- [2] Broadbent, D. (1958). *Perception and Communication*. London: Pergamon Press.
- [3] Hasler, B. S., Kersten, B., & Sweller, J. (2007). Learner control, cognitive load and instructional animation. *Applied Cognitive Psychology*, 21(6), 713–729. <https://doi.org/10.1002/acp.1345>
- [4] Janssen, J., Kirschner, F., Erkens, G., Kirschner, P. A., & Paas, F. (2010). Making the black box of collaborative learning transparent: Combining process-oriented and cognitive load approaches. *Educational Psychology Review*, 22(2), 139-154.
- [5] McLeod, S. (2023). Theories of Selective Attention in Psychology. *Simply Psychology*. <https://www.simplypsychology.org/attention-models.html>
- [6] Plass, J. L., Moreno, R., & Brünken, R. (2010). *Cognitive load theory*. Cambridge University Press.

- [7] Sweller, J. (2010). Cognitive load theory: Recent theoretical advances. In J. L. Plass, R. Moreno, & R. Brünken (Eds.), *Cognitive load theory* (pp. 29-47). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511844744.004>
- [8] Treisman, A., 1964. Selective attention in man. *British Medical Bulletin*, 20, 12-16.

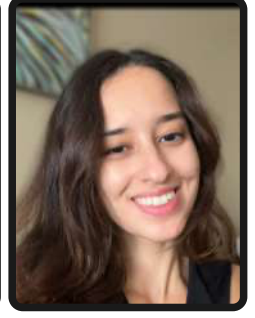
Matematiğin Aynasında Bilinç- dışı: Mantıktan Topolojiye Bir Yolculuk

AHSEN IRMAK KOCA¹ VE EKİN EVER²

¹Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü 4. Sınıf Öğrencisi

²Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü 4. Sınıf Öğrencisi

✉ kocaahsenirmak@gmail.com, everekin@gmail.com



Felsefe ve psikolojinin temel taşları olan bilinç ve bilinçdışı, doğaları gereği muğlak ve tartışmalı kavramlardır. Bu yazıda, söz konusu belirsizliğe rağmen matematiğin bu kavramlara nasıl formal bir yapı ve sistematik bir açıklama getirdiği ele alınacaktır. Bu doğrultuda, öncelikle matematiğin bilinçli düşünce süreçleriyle olan ilişkisi irdelenecek, ardından Lacan'ın, bilinçdışının yapısını Topoloji ve Gödel'in Eksiklik Teoremleri gibi matematiksel araçlarla modellediği teorik çerçeve analiz edilecektir.

İncelemeye, Galileo'nun matematiğin sadece insan zihninin bir icadı değil, aynı zamanda evrensel bir gerçeklik olduğuna işaret eden 'Evrenin kitabı matematik diliyle yazılmıştır' sözüyle başlamak yerinde olacaktır. Bu bağlamda bilinçli düşünce, en temel tanımla, dış dünyadaki yapılar ile iç dünyadaki semboller arasında tutarlı bir eşleşme kurabilme yeteneğidir. Bir zihnin iki farklı sistemin aynı yapıya sahip olduğunu kavraması, matematikteki izomorfizma kavramıyla paralellik gösterir. İzomorfizma, dışarıdan farklı görünseler bile iki yapının işleyiş kurallarının birebir eşleşmesidir; yani kabuk değişse de özün ve matematiğin aynı kalmasıdır.

Zihnin bu formal örgütlenişi, mantık biliminin de çıkış noktasıdır. Örneğin George Boole'un, mantığı matematikselleştirdiği eserine 'The Laws of Thought' (Düşüncenin Yasaları) adını vermesi de bu ilişkinin tarihsel bir göstergesidir. Çünkü bilinçli düşünce, rastgele çağrışımlardan oluşan dağınık bir yapı değil, belirli aksiyomlar ve çıkarım kuralları üzerine kurulu sistematik bir süreçtir.

Bu açıdan bakıldığında bilinçli düşünce, matematiksel bir formal sistem gibi işler. Nasıl ki bir formal sistem temel bir alfabeye ihtiyaç duyuyorsa, düşünce süreci de temel kavramlara ve doğruluğu sorgusuz kabul edilen başlangıç noktalarına, yani aksiyomlara dayanır. Descartes'ın "Düşünüyorum, öyleyse varım" ifadesi, zihinsel bir aksiyom gibidir. Benzer şekilde modern matematik de kanıtlanmadan doğru kabul edilen bu aksiyomlardan yola çıkar. *Modus Ponens* veya tümevarım gibi mantık kurallarını kullanarak, bu temellerden yeni önermelerin nasıl türetilceğini belirler. Bu yapının merkezinde yer alan önermeler mantığı, ifadelerin kesin bir doğruluk değerine sahip olmasını sağlar. Böylece matematiksel dil belirsizlikten arınır ve düşüncenin grameri oluşmuş olur.

Önermeler mantığının kurduğu bu kesinlik zemini, daha karmaşık matematiksel yapıların da temelidir. Sadece ifadelerin doğruluk değerleriyle ilgilenen bu mantığın bir adım ötesinde, niceleyiciler ve fonksiyonlar aracılığıyla nesnelerin iç yapısını analiz eden Niceleme Mantığı (Yüklem Mantığı) yer alır. Modern matematiğin evrensel dili olan Zermelo-Fraenkel (ZF) Küme Teorisi de bu altyapı üzerinde yükselir. Dolayısıyla matematiksel mantık, bilinçli akıl yürütme yeteneğimizin formalize edilmiş en rafine hali olarak görülebilir. Bu sistemin nihai amacı tutarlılıktır. Matematiğin "bir şey aynı anda hem doğru hem yanlış olamaz" ilkesi, zihnimizi saçmalamaktan korur ve bizi mantıklı düşünmeye zorlar.

Bununla birlikte matematiksel dil, semboller sayesinde bizi somut eşyaların sınırlarından kurtarır ve soyut düşünmemizi sağlar. Dilin en temel işlevi olan düşünce aktarımı, matematiksel dil sayesinde kültürel

veya kişisel yorum farklılıklarından arınarak kesinlik kazanır. Örneğin $2+2=4$ önermesinin doğruluğu, kimsenin kişisel yorumuna bağlı değildir; bu da bilgiyi evrensel ve tartışılmaz kılar.

■ Matematik sadece bilinçli düşüncede mi vardır?

Peki, matematik sadece farkında olduğumuz düşünceleri mi açıklar? Bunu anlamak için bilinçdışının ne olduğuna bakmalıyız. Bilinçdışı, beyinde elle tutulur bir bölge değil, teorik bir varsayımdır. Psikanalist Otto Fenichel'e göre bu varsayım olmadan davranışlarımızı anlamamız ve geleceği öngörmemiz imkânsızdır. Fenichel bu durumu şu sözlerle ifade eder:

Bilinçdışının var olduğu, psikanaliz bilinçli fenomenleri bilimsel olarak açıklamaya ve anlamaya çalıştığı andan itibaren kendini kabul ettiren bir varsayımdır. Bu varsayım olmaksızın, sadece kendi ilişkileri içindeki bilincin verileri anlaşılabilir olarak kalırlar; bu varsayım sayesinde tüm bilimsel başarıları karakterize eden bir şey imkân dahiline girer: Geleceği önceden söyleyebilmek ve sistematik bir etki yaratabilmek.

Jacques Lacan ise olaya daha mantıksal yaklaşır. Ona göre bilinçdışı, insanın dille kurduğu ilişkinin mecburi bir sonucudur. Descartes'ın "Düşünüyorum, öyleyse varım" sözü, dilsiz bir düşüncenin olamayacağını gösterir. Burada matematik ve dil birbirine çok benzer. Geometrideki nokta veya doğru, fiziksel dünyada tam olarak yoktur ama sistemin işlemesi için gereklidir. Matematiksel akıl yürütme de aslında özel bir dilin sınırlarını keşfetme oyunudur.

Lacan, dilin hem öznenin hem de dış gerçeklikten bağımsız olan bu özerk yapısını *Simgesel Düzen* olarak tanımlar. Biz kendimizi her şeye hâkim bir 'Ben' sansak da aslında bu bir yanılsamadır. Dil, bizim altımızda işleyen dev bir yapıdır; biz dili değil, dil bizi yönetir. Lacan'ın "Bilinçdışı bir dil gibi yapılanmıştır" sözü tam da bunu anlatır; bilinçdışımız da rastgele değil, dilin kuralları gibi örgütlüdür.

Bu yaklaşım, soyut cebirdeki yapılara çarpıcı bir paralellik gösterir. Örneğin bir grup veya halka yapısında elemanlar, tek başlarına değil; aksiyomların tanımladığı ilişkiler aracılığıyla anlam kazanırlar. Lacan'da da semboller tek başlarına değil, ilişkisel ağ içinde değer kazanır; özne bu ağın kurallarına göre şekillenir.

Bu yapısal paralellik, 'eksiklik' kavramı üzerinden matematiğin en derin konularından birine, Kurt Gödel'in Eksiklik Teoremleri'ne uzanır. Lacan'ın, insan öznesinin doğasında doldurulamaz bir boşluk olduğu (Arzu nesnesinin eksikliği) fikri, Gödel'in teoremleriyle metaforik bir benzerlik taşır. Gödel, aritmetik gibi yeterince karmaşık sistemlerin kendi tutarlılıklarını, yine kendi kurallarını kullanarak asla tam olarak ispatlayamayacağını kanıtlamıştır. Yani, bu tür her sistemde doğru olduğu halde ispatlanamayan, karar verilemez noktalar mutlaka bulunur.

Bunun psikanalizdeki yansıması şudur: Nasıl ki aritmetiği kapsayan bir formal sistem kendi içinde kapalı ve kusursuz bir bütün olamıyorsa, dilin içine doğan insan zihni de asla tam ve eksiksiz olamaz. Bilinçdışı, işte bu sistemin kapatamadığı boşluk veya mantıksal bir açık olarak işler. Kısacası Lacan'ın bahsettiği eksiklik, dilin yapısından kaynaklanan zorunlu bir sonuçtur; tıpkı hiçbir formal sistemin kendi tutarlılığını tek başına garanti edememesi gibi.

■ Bilinçdışının Topolojik Formalizasyonu

Jacques Lacan, psikanalizi daha bilimsel bir zemine oturtmak ve Freudyen kavramları somutlaştırmak amacıyla matematiğin bir alt dalı olan topolojiye başvurmuştur. Lacan için topolojik yüzeyler yalnızca birer metafor değil, bilinçdışının yapısının işleyişine dair birer modeldir. Bu bağlamda, bilinçdışının yapısal paradokslarını modellemek için üç temel topolojik nesne öne çıkar: Möbius şeridi, Torus ve Borromean düğümleri.

İlk olarak Möbius Şeridi, geleneksel iç ve dış ayrımını ortadan kaldıran ve topolojide yönlendirilemez olarak tanımlanan yapısıyla dikkat çeker. Alışlagelmiş yüzeylerin aksine, Möbius şeridinde bir sınır çizgisi

aşılmadan, sadece yüzey üzerinde ilerleyerek dışarıdan içeriye geçmek mümkündür. Bu durum, mekânsal algımızdaki ikiliği yıkan somut bir geometrik paradokstur. Matematiksel olarak tek yüzlü ve tek kenarlı olan bu şerit, üç boyutlu Öklid uzayı içinde şu parametrik denklemlerle ifade edilebilir:

R merkez yarıçapı, $2w$ şerit genişliği ve $v \in [-w, w]$ olmak üzere;

$$x(u, v) = (R + v \cos(u/2)) \cos(u)$$

$$y(u, v) = (R + v \cos(u/2)) \sin(u)$$

$$z(u, v) = v \sin(u/2)$$

matematiksel denklemleri karmaşık olsa da, felsefesi basittir: 'Ben' ve 'Öteki' arasında kesin bir duvar yoktur; bilinç ve bilinçdışı birbirine sürekli akan bir döngüdür.



Şekil 1. Kaynak: Wikipedia - Möbius strip

İkinci önemli yapı, Torus (Simit) yüzeyidir. Bir çemberin, kendisini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen bu yüzey, şu parametrik denklemlerle tanımlanır:

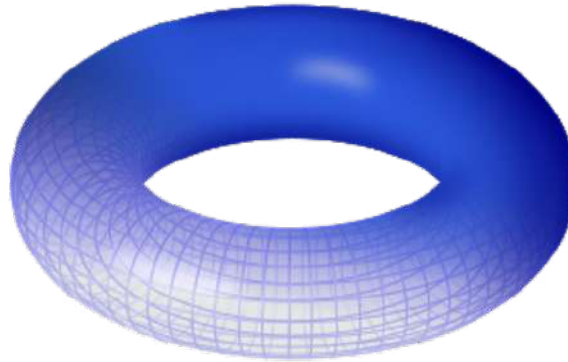
R Büyük yarıçap, r küçük yarıçap ve $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$ olmak üzere;

$$x(\theta, \varphi) = (R + r \cos(\varphi)) \cos(\theta)$$

$$y(\theta, \varphi) = (R + r \cos(\varphi)) \sin(\theta)$$

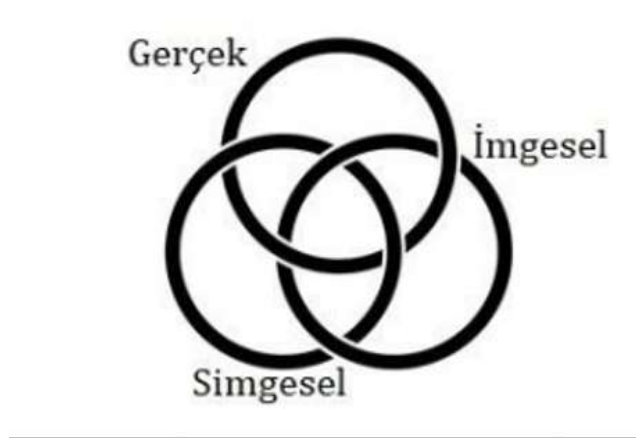
$$z(\theta, \varphi) = r \sin(\varphi)$$

Lacan, Torus'un geometrik yapısındaki merkezi boşluğu, 'Arzu' ve 'Nesne' kavramlarını açıklamak için kullanır. Arzu, bu boşluğun etrafında dönüp duran sonsuz bir turdur. Torusun var olması için o boşluk şarttır; insanı var eden de içindeki bu eksikliklerdir.



Şekil 2. Kaynak: Wikipedia - Simit (geometri)

Son olarak Borromean Düğümleri, Düğüm Teorisine özel bir topolojik yapıdır. Üç halkanın birbirine geçtiği bu yapıda, herhangi iki halka birbirine bağlı değildir; ancak üçü bir aradayken kilitli durumdadırlar. Halkalardan sadece biri kesildiğinde, diğer ikisi de serbest kalır. Lacan bunu insanın gerçekliğini oluşturan üçlüye benzetir: Gerçek, Simgesel ve İmgesel. Eğer bunlardan biri (mesela Simgesel düzen) koparsa, kişinin gerçeklik algısı tamamen dağınık ve psikoz ortaya çıkar.



Şekil 3. Kaynak: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/804493>

■ Matematik Bize Bilinçdışı Hakkında Ne Söyler?

Sonuç olarak matematik yalnızca bilinçli aklın bir aracı değil, aynı zamanda bilinçdışı süreçleri modelleyen yapısal bir dildir. Mantık, bilinçli düşüncemizin kurallarını koyarken; topoloji ve Gödel'in teoremleri, bilinçdışının o garip, paradoksal yapısını çözmemize yardım eder.

Topoloji bize bilinçdışının içi dışı olmayan (Möbius) veya ortası boş (Torus) bir yapı olduğunu gösterir. Gödel ise, insanın doğası gereği eksik bir varlık olduğunu ve bu eksikliğin bizim kimliğimizi oluşturduğunu kanıtlar. Yani matematik bize şunu söyler: Bilinçdışı da bir dil gibi kurulmuştur, ama kendi kendini asla tam olarak ispatlayamayan, doğası gereği yarım kalmış bir sistemdir.

■ Kaynaklar

- [1] Boole, G. (1854). The Laws of Thought. London: Macmillan and Co.
- [2] Hofstadter, D. R. (2001). Gödel, Escher, Bach: Bir Ebedi Gökçe Belik. (E. Büyükaka, Çev.). İstanbul: Kabalıcı Yayınevi.
- [3] Kaçar, E. (2018). Lacan ve Topoloji. FLSF Felsefe ve Sosyal Bilimler Dergisi, (25), 535-554.
- [4] Lacan, J. (2013). Seminer 20: Yine (Encore). (S. M. Tura, Çev.). İstanbul: Metis Yayınları.
- [5] Lacan, J. (2014). Seminer 23: Sinthome (Le Sinthome). (M. Çiçek & S. M. Tura, Çev.). İstanbul: Metis Yayınları.
- [6] Ragland, E. & Milovanovic, D. (Ed.). (2012). Lacan: Topologically Speaking. (Y. Algan, Çev.). İstanbul: Metis Yayınları.
- [7] Tura, S. M. (2005). Freud'dan Lacan'a Psikanaliz. İstanbul: Kanat Yayınları.

Erasmus Günlükleri



■ Erasmus+ Karma Yoğun Program (BIP), Cagliari Üniversitesi, İtalya



Soldan sağa: Eylem Öztürk, Fatma Gamze Düzgün, Tolga Topçuoğlu, Cemre Demirtaş, Muhammet Safa Demir, Nurten Ünlerşen, Doğan Mete Gümüş, Berke Kaleboğaz

2025 yazı, Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencileri olarak İtalya'nın Sardinya adasında bulunan Cagliari Üniversitesi'nin ev sahipliğinde gerçekleştirilen Erasmus BIP (Blended Intensive Programme) kapsamında değerli bir akademik deneyim yaşadık. "Adi Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları" başlıklı yoğunlaştırılmış eğitim programı, alanında uzman akademisyenlerin katkılarıyla beş gün boyunca hem teorik hem de uygulamalı içeriklerle dolu, oldukça verimli bir çalışma ortamı sundu.

Program, Hacettepe Üniversitesi'nden beş öğrenci; Nurten Ünlerşen, Cemre Demirtaş, Muhammet Safa Aydemir, Tolga Topçuoğlu ve Doğan Mete Gümüş ile hocalarımız Doç. Dr. Berke Kaleboğaz ve Doç. Dr. Eylem Öztürk eşliğinde gerçekleştirildi. Programa ayrıca Cádiz Üniversitesi'nden öğretim üyeleri ve öğrencileri ile Cagliari Üniversitesi'nden öğretim üyeleri ve öğrencileri katıldı. Böylece farklı ülkelerden öğrencilerin bir

araya geldiği, disiplinler arası iletişimin ve kültürel etkileşimin canlı biçimde yaşandığı uluslararası bir akademik ortam oluştu.

Programın akademik yapısı üç ana ders etrafında şekilleniyordu. Birinci ders, Ordinary Differential Equations alanında kapsamlı bir giriş niteliğindeydi. Burada birinci merteye lineer diferansiyel denklemler, lineer ODE sistemleri, çözüm yöntemleri ve temel varlık ve teklik teoremleri ele alındı. Ardından bu teorik bilgiler gerçek yaşamdan alınmış çeşitli modeller üzerinde uygulanarak, diferansiyel denklemlerin biyoloji, mühendislik ve fizik gibi disiplinlerdeki kullanımına dair güçlü bir bakış açısı elde etmemiz sağlandı.

İkinci ders ise kısmi diferansiyel denklemler ve bu denklemlerin nümerik çözüm yöntemleri üzerineydi. Ders kapsamında PDE türleri tanıtılmış, ardından özellikle Sonlu Elemanlar Yöntemi (Finite Element Method - FEM) üzerinde durulmuştur. FEM'in teorik temelleri, işlevsel analiz altyapısı ve mühendislik problemlerini simüle etmedeki etkinliği uygulamalı örneklerle desteklenerek aktarıldı. Bu bölüm, özellikle bilgisayar destekli matematiksel modelleme alanına ilgi duyan öğrenciler için oldukça geliştiriciydi.

Üçüncü ders ise PDE'lerin matematiksel modellemedeki rolüne odaklanıyordu. Bu kapsamda parabolik, eliptik ve hiperbolik denklemler sınıflandırılarak özellikle Isı Denklemi, Laplace ve Poisson Denklemleri ayrıntılı biçimde incelendi. Dersin en dikkat çekici kısmı, biyolojik bir süreç olan kemotaksi davranışını modelleyen Keller–Segel sistemi üzerinden yapılan tartışmaydı. Parabolik difüzyon ile yönlü hareketin birleşiminin nasıl kolektif hücre davranışına yol açtığı matematiksel açıdan açıklanarak modelleme perspektifimizi genişletti.

Cagliari Üniversitesi'nin titizlikle hazırladığı organizasyon sayesinde hem akademik hem sosyal açıdan son derece verimli bir hafta geçirdik. Bu program, yalnızca bilgi edinmemizi değil; aynı zamanda uluslararası işbirliği, ekip çalışması ve akademik paylaşım kültürünü de deneyimlememizi sağladı.

Ayrıca, program kapsamında aldığımız “Theoretical and Numerical Analysis of Differential Equations and Their Applications” dersi, bölümümüzdeki “Adi Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları” seçmeli dersine denk saydırıldı.

Erasmus BIP kapsamında elde ettiğimiz bu deneyim, ilerideki akademik ve profesyonel yaşamımız için bize ilham veren önemli bir adım oldu. Bu sürecin gerçekleşmesinde emeği geçen tüm hocalarımıza ve Cagliari Üniversitesi'ne teşekkür ederiz.

Nurten Ünlerşen, Cemre Demirtaş, Muhammet Safa Demir, Tolga Topçuoğlu, Doğan Mete Gümüş
Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü Lisans Öğrencileri

Mesleğe İlk Adımlar

Matematik çoğu zaman soyut düşünce, ispat ve kuramsal derinlikle anılır, ancak bu birikim, üniversite sıralarının ötesinde çok farklı alanlarda karşılık bulur. Öğrencilerimizin staj deneyimleri, matematiğin yalnızca ders kitaplarında değil, veri analizinden yazılım geliştirmeye, finanstan kamu kurumlarına kadar pek çok alanda aktif bir rol oynadığını gösteriyor.

Bu sayıyla birlikte başlattığımız “Mesleğe İlk Adımlar” köşesinde, bölümümüz öğrencilerinin nerelerde staj yaptıklarını tanıtıyor ve deneyimlerinden kısa kesitlere yer veriyoruz. Amaç, hem matematik bilgisinin uygulamadaki yansımalarını görünür kılmak hem de henüz yolun başında olan öğrencilerimize somut örnekler sunmaktır. Her staj hikâyesi, matematiğin gerçek dünyayla kurduğu bağa dair küçük ama değerli bir pencere açıyor. Bu köşenin, öğrencilerimizin kariyer yolculuklarında cesaret verici bir rehber olmasını diliyoruz.

■ GÜLCE KORUN, Yeşilova Holding



Merhaba. 2024-2025 eğitim öğretim yılının yaz tatilinde okulumun bana sağladığı imkanlar sayesinde sürdürülebilirlik konusunda Türkiye’nin en iyilerinden olan Yeşilova Holding’de “Kurumsal Sürdürülebilirlik” departmanında 1 aylık staj yapma deneyimim oldu.

Bu süreç uzun zamandır aklımda olan, “Kurumsal şirketlerde çalışmak nasıl?”, “Matematik bölümümü bitirdikten sonra hangi sektörlerde çalışabilirim?” sorularını cevaplamamda oldukça yol gösterici oldu.

Mentörüm Eda Çetintaş’a özellikle teşekkür etmeliyim ki bana, bir stajyerin iyi hissetmesi ve bulunduğu süreç boyunca maksimum verim alması için neler yapılması gerekiyorsa yaptı. Haftalık makale araştırma ve rapor yazma görevlerim dışında, işçilerin “Enerji Verimliliği” kavramı hakkında bilgilenmeleri ve bunu eğlenerek yapmaları için fiziksel oyna-

nacak projeler tasarlamamı ve Enerji verimliliği birimine sunmamı istedi. Benden daha deneyimli ve bu konuda bilgili insanlara bu sunumu yapmak özgüven açısından da beni oldukça geliştirdi.

Bunların matematikle ne alakası var dersiniz, bizden istenileni algılama, kaynak taraması yapma ve elimizdeki verileri ve bütçeyi kullanarak istenilen sonuca en karlı şekilde ulaşmak aslında bu bölümü okurken elde ettiğimiz analitik düşünce becerimizin bir sonucu ile bu kadar kısa zamanda herkesin beğenisini toplayan projeler üretmemizi sağlıyor. Bunun yanında Eda Hanımın tutmuş olduğu ve analizlerini yaptığı verilerin Excel’de incelemesini gerçekleştirdik. Excel’in çeşitli kullanım yönlerini keşfetme ve uygulama şansım oldu.

Sürdürülebilirlik, artık günümüzde önemi çokça olan, başta bireysel sonra toplumsal anlamda çevreye karşı oldukça sorumluluklarımızın olduğu önemli bir kavram. Bunun şirketler üzerindeki etkileri ve uyguladıkları politikaları yerinde deneyimleme şansı oldukça eşsiz bir deneyimdi.

Çevreyi korumak, doğayı daha yaşanabilir hale getirmek ve küresel ısınmayı durdurabilmek için gerekli verilerle hesaplamalar yapmak şart. Matematik bölümünün bize sağladığı seçmeli derslerin avantajı tam

olarak burada devreye giriyor. Optimizasyon, matematiksel modelleme, nümerik analiz, veri yapıları ve algoritmaları gibi daha nice dersimiz bu konuda kendimizi geliştirmemizde olanak sağlıyor. Sürdürülebilirlik ve matematik çok uzak iki kavram gibi gözükse de ilişkileri sandığımızdan daha köklü ve yenilikçi.

Eğitim öğretim dönemi içerisinde mezun olmadan önce yapabilen herkesin staj deneyimini yaşamasını, mezun olduğunda yeni işe başladığında deneyimsiz olmaması ve kendi kriterlerini anlaması açısından tavsiye ediyorum.

■ CEREN KİPER, *Türk Kızılayı*



Stajımı, insani yardım alanında öncü olan Türk Kızılayı bünyesindeki Bağışçı İlişkileri ve Kaynak Geliştirme Direktörlüğü'nde tamamladım. Bu birim, kurumun sürdürülebilirliği için kaynak yaratma, bağışçı memnuniyetini sağlama ve bağış süreçlerini stratejik olarak yönetme misyonunu üstlenmektedir.

Yedi haftalık stajımda gerçekleştirdiğim çalışmaları üç ana başlıkta özetleyebilirim:

- *Veri Analitiği*: Büyük veri kümelerini Python kütüphaneleriyle temizleyerek analize hazır hale getirdim. Bağışçı sadakatini ölçümleyen RFM (Yenilik, Sıklık, Tutar) modelleri geliştirdim ve Min-Max Normalizasyonu ile DAX fonksiyonlarını kullanarak segmentasyon hassasiyetini optimize ettim.

• *İş Zekası*: Operasyonel verileri Microsoft Power BI ve Yıldız Şeması metodolojisiyle görselleştirerek, yönetimsel kararları destekleyen anlık ve dinamik iş zekası raporu tasarladım.

• *Süreç Geliştirme*: Kurumsal hafızaya katkı sağlamak adına nakdi bağış iade sürecini standartlaştıran bir prosedür hazırladım ve stratejik içgörüler sunan bir "Bağışçı Motivasyon Anketi" geliştirdim.

Bu staj, matematiksel teoriyi iş dünyasında stratejik uygulamalara dönüştürmemi sağladı. Büyük ölçekli bir yapıda veri odaklı karar alma süreçlerini bizzat deneyimleyerek, akademik disiplinimi profesyonel bir vizyonla birleştirdim. Bu deneyim, akademik birikimimi profesyonel yetkinliklerle birleştirerek kariyer yolculuğumda sağlam bir temel oluşturmuştur.

■ İREM ÖZMEN, *LC Waikiki*



Staj çalışmam, 5 kıtada 60'tan fazla ülkede faaliyet gösteren global perakende devi LC Waikiki'nin teknoloji üssünde, Veri Analitiği ve Yapay Zeka biriminde gerçekleştirilmiştir. Yaklaşık 400 TB'lık Data Lake üzerinde çalışan bu departman, klasik iş zekası raporlamalarının ötesine geçerek; görüntü işleme (Computer Vision), doğal dil işleme (NLP) ve tahminleyici modelleme gibi yapay zeka teknolojilerini iş süreçlerine entegre eden bir Ar-Ge merkezi niteliğindedir.

Staj süresince, Matematik ve İstatistik (ÇAP) programlarında edindiğim teorik altyapıyı, sektörün gerçek dinamikleriyle birleştirerek üç temel proje odağında uygulama fırsatı buldum:

- *Görüntü İşleme*: Laboratuvar kalite kontrol süreçlerini otomatize etmek amacıyla, mikroskop altındaki kumaş görüntülerinden içerik tahmini yapan YOLOv8 ve CNN tabanlı derin öğrenme modellerinin geliştirilme-

sinde aktif rol aldım.

• *Müşteri Segmentasyonu*: SQL ve Python kullanarak e-ticaret verileri üzerinde RFM analizi gerçekleştirdim. İstatistiksel quantile hesaplamalarıyla müşterileri davranışlarına göre anlamlı segmentlere ayırarak pazarlama stratejilerine analitik içgörüler sağladım.

• *Tahminleme Modeli:* Şahsıma tanımlanan proje kapsamında, müşterilerin alışveriş alışkanlıklarından yola çıkarak "Çocuk Sahibi Olma" durumunu tahminleyen bir sınıflandırma modelini geliştirdim. Veri toplama aşamasından model eğitime kadar uçtan uca yönettiğim bu süreçte, feature engineering ve korelasyon analizlerini doğrudan uygulama şansını buldum.

Bu deneyim, akademik dünyadaki "temiz veri" kavramı ile endüstrideki "büyük ve karmaşık veri" arasındaki farkı bizzat tecrübe etmemi sağlamıştır. Projelerin sadece teknik doğruluğunun değil, ticari etkisinin ve paydaşlara sunumunun da kritik önemini kavradım. Matematik ve İstatistik disiplinlerinin, yapay zekâ alanındaki karmaşık problemleri modellemede ne kadar güçlü araçlar olduğunu görmek, kariyer hedeflerimi daha da pekiştirmiştir.

■ MİRAY ÖZDEMİR, *Bera Yazılım*



Bera Yazılım, 2018 yılında kurulmuş; siber güvenlik, yapay zekâ ve mobil/web tabanlı yazılım çözümlerine odaklanan bir Ar-Ge firmasıdır. Ankara ve Malatya ofislerinde, modern mimari yaklaşımlar (MVVM) ve ileri düzey teknolojiler kullanarak kamu ve özel sektöre hizmet vermektedir.

Staj süresince edindiğim teknik deneyimler şu başlıklar altında toplanmıştır:

- *Mobil Uygulama Geliştirme:* Android Studio ve Kotlin kullanarak UI bileşenleri, activity-fragment yapısı ve Firebase veritabanı etkileşimleri üzerine çalışmalar yaptım.
- *Mimari ve API Entegrasyonu:* Uygulama performansını optimize eden MVVM mimarisini ve RESTful API tabanlı veri iletişim süreçlerini inceledim.

• *Proje Yönetimi ve Test:* Git ve Jira araçlarıyla yazılım yaşam döngüsünü deneyimledim; Türk Kızılayı projesinin yenilenme sürecinde hata ayıklama (debugging) ve test aşamalarına destek verdim.

Bu staj, üniversitede öğrendiğim teorik matematik bilgilerini profesyonel yazılım süreçleriyle birleştirme fırsatı sunmuştur. Yazılımın sadece kodlamadan ibaret olmadığını, ekip çalışması ve planlamanın kritik önemini kavramak kariyer hedeflerimi mobil geliştirme alanında netleştirmiştir.

■ RANA NUR CEYLAN, *BBR Mimarlık & Mühendislik*



Staj çalışmam, Antalya Kepez'de mimari tasarım ve yazılım destekli çözümler üzerine uzmanlaşan BBR Mimarlık & Mühendislik bünyesinde, Bilişim Destek Stajyeri olarak gerçekleştirilmiştir. Teknik destek biriminde; mimari projelerde otomasyon, veri analizi ve yazılım destekli modelleme yöntemlerinin geliştirilmesi üzerine odaklanılmıştır.

Süreç boyunca, matematiksel düşünce yapımı ve Python programlama becerilerimi mimari iş akışlarını optimize etmek için kullandım. CA-D/BIM verilerini kullanarak metraj ve maliyet hesaplamalarını otomatikleştiren sistemler geliştirdim. Ayrıca, geçmiş proje verileri üzerinde istatistiksel modeller oluşturarak malzeme seçimlerinin performans ve maliyet analizlerini gerçekleştirdim. Bu çalışmalar, teknik ekibin rutin hesaplamalarındaki hata payını azaltarak ofis verimliliğini artırmıştır.

Bu deneyim, matematik bölümünde edindiğim teorik bilgilerin "Hesaplamalı Tasarım" ve veri yönetimi gibi alanlardaki kritik önemini kanıtlamıştır. Analitik araçların farklı

disiplinlere entegrasyonu konusundaki yetkinliğimi pekiştiren bu staj, kariyer hedeflerimi bilişim teknolojileri ve optimizasyon süreçleri yönünde netleştirmiştir.

■ İSMET DEMİR, *Türkiye Halk Bankası*



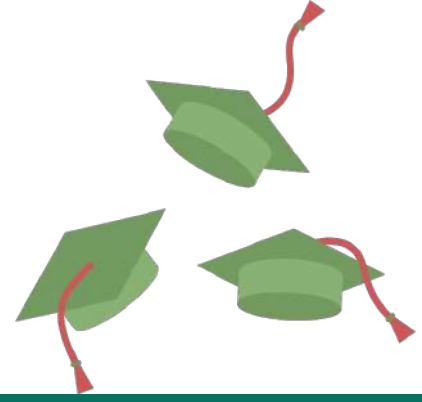
Bu yazı, Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü seçmeli staj programı kapsamında Türkiye Halk Bankası A.Ş.’nin Söğütözü Şubesi’nde gerçekleştirilen yirmi iş günlük staj sürecine dayanmaktadır. Halkbank, geniş şube ağı ve güçlü dijital bankacılık altyapısıyla KOBİ ve bireysel bankacılık alanında faaliyet gösteren köklü bir kamu bankasıdır. Staj yapılan şube; bireysel bankacılık, ticari/KOBİ bankacılığı, operasyon, vezne ve müşteri ilişkileri birimleriyle bankacılık işleyişinin temel dinamiklerini gözlemlene imkânı sunmuştur.

Staj süresince bireysel ve ticari kredi süreçleri, müşteri deneyimi yönetimi, dijital bankacılık yönlendirmeleri, mevduat ve faiz hesaplamaları, POS ve para transfer sistemleri, nakit ve ATM operasyonları, iç kontrol ve denetim mekanizmaları gibi birçok alanda uygulamalı gözlemler yapılmıştır. Özellikle kredi değerlendirme süreçlerinde kullanılan finansal

oran analizleri, risk skollama sistemleri, istatistiksel modelleme yaklaşımları ve faiz hesaplama yöntemleri, matematiksel altyapının bankacılık uygulamalarındaki somut karşılığını açık biçimde ortaya koymuştur. Excel tabanlı amortisman tabloları, kredi geri ödeme planları, müşteri segmentasyonu ve veri analizleri gibi çalışmalar, teorik matematik bilgisinin gerçek veri üzerinden nasıl kullanılabildiğini göstermiştir.

Bu staj deneyimi, bankacılığın yalnızca finansal işlemlerden ibaret olmadığını; güçlü bir organizasyon yapısı, etkin iç kontrol mekanizmaları, dijital dönüşüm süreçleri ve müşteri odaklı hizmet kültürü ile bütünleşmiş bir sistem olduğunu ortaya koymuştur. Matematiksel düşünme, istatistiksel analiz ve modelleme becerilerinin kredi analizi, risk değerlendirme ve finansal planlama gibi alanlarda doğrudan kullanılabildiği görülmüş; bu durum akademik bilgi ile mesleki uygulama arasında güçlü bir köprü kurulmasını sağlamıştır. Sonuç olarak bu süreç, hem bankacılık sektörüne dair kapsamlı bir anlayış kazandırmış hem de mesleki yönelimlerin belirlenmesinde önemli bir rehber olmuştur.

Mezun Hikâyeleri



Matematik bölümünden mezun olan öğrencilerimizin yolları farklı yönle uzanıyor: akademi, özel sektör, yurt dışı deneyimleri ve daha fazlası... İlk sayımızda başlattığımız bu köşede, mezunlarımızın hem öğrencilik anılarına hem de mezuniyet sonrası deneyimlerine kulak vermeye devam ediyoruz. Her yeni hikâye, bölümümüzün yaşayan hafızasına bir katkı ve aynı zamanda bugünün öğrencileri için ilham niteliğinde.

■ BURCU AYBAK DİNÇ 11' – *Unity, Kıdemli Yazılım Mühendisi*



burcu-aybak-dinç-b7888251

Üniversite sınavından sonra tercih zamanı gelmişti. Kariyer hedefim Yazılım Mühendisliği yapmaktı ama Matematiğe âşıktım. Matematiğe dair öğrenebileceğim her şeyi öğrenmek istiyordum ve benden daha fazla matematik bilen birileriyle karşılaşmak fikri beni rahatsız ediyordu. Yazılım eğitimini kurslar ile ya da yüksek lisans ile yapabilirdim ama Matematiği bu şekilde öğrenebilmek pek mümkün değildi. Bu sebeple üniversite tercihlerimi yaparken yalnızca beş tercih yaptım ve beşi de Matematikti :). Böylece Hacettepe Matematik serüvenim 2002 yılında İngilizce hazırlık ile başlamış oldu.

Bugün geriye dönüp baktığımda, bu kararın beni ben yapan en önemli tercihlerden biri olduğunu net bir şekilde söyleyebiliyorum. Matematik ile ilgili her şeyi öğrenme hedefime gelince: elbette bu isteğin gerçekleşmesinin mümkün olmadığını, Hacettepe Matematik Bölümü'ne başladığımda fark ettim. Çünkü matematik, “öğrendim, biliyorum” denilebilecek bir alan değil; aksine, derinleştikçe insanın ne kadar az bildiğini fark ettiği bir disiplin.

Üniversite hayatım boyunca maddi nedenlerden ötürü çalışmak zorundaydım; bir dershanede çalışıyor, aynı zamanda birçok özel ders veriyordum.

Yazılım alanında ilerlemek istediğim için, hazırlık okurken özel derslerden kazandığım parayla bir Yazılım Mühendisliği kursuna gittim ve oldukça başarılı oldum. Problem çözmekten aldığım keyif ve sürekli yeni şeyler öğrenme isteğim birleşince kendim için en doğru kariyer yolunda olduğumu bir kez daha fark ettim. Sonraki yıllarda bölümde açılan neredeyse tüm yazılım derslerini aldım ve tamamını A1 ile geçtim çünkü bu derslere çalışmak için ekstra zaman ayırmama gerek kalmıyordu.

Çalıştığım için kendi derslerime ayırabileceğim zamanım oldukça kısıtlıydı. Bu nedenle sınavlarına hazırlanırken çok farklı soru tipi çözmeyi gerektiren dersler beni en çok zorlayan dersler oldu. Fazla soru çözerek çalışmadığım için sınav esnasında çözümümü hızlı görebilirdim iyi not alabiliyordum. Sınavın sonucunun ne olacağını sorulara hızlıca bakınca kestirebiliyordum. Eğer yapabileceksem hızlı bir şekilde yapabileceğim sorulara odaklanıyor yapamayacağımı düşünüyorsam da bir soru seçip o soru ile başbaşa kalmanın tadını çıkarıyordum. Kendimce farklı yaklaşımlar yapmayı hep sevmiştim. Hatta bir Analiz

sınavında Rolle Teoreminin ispatını kendi yöntemimle yapmış ve o sorudan tam puan almıştım. Dersi geçememiştim ama o ispattan tam puan almak beni ziyadesiyle mutlu etmişti. :) Paradoksal gibi görünse de en başarılı olduğum dersler soyut dersler oldu. Bu derslerin tamamını ilk alışımında geçtim. Soyut derslerin sınavlarına hazırlanma biçimim de biraz sıra dışıydı. Keçiören’de oturuyordum ve Ankara trafiğini de hesaba katarak sınav sabahları olabilecek en erken saatte okula gidip, kütüphanede sadece ders notlarımı okuyordum. Tüm notları okumam 3-4 saat kadar sürüyordu. Çoğu zaman her şeyi zaten bildiğimi, okurken yalnızca hatırladığımı hissedirdim. Ardından doğrudan sınava girerdim. Öğleden sonra yapılan sınavlar genellikle daha iyi geçerken, sabah erken saatlerde yapılan sınavlar pek parlak olmazdı. Malum sabah erken saatte olunca ders notlarını okumayı bitiremezdim. :D Bu yöntemi ilk kez Nuri Çimen’den aldığım Soyut Matematik dersinde uygulamıştım. Sınavdan sonra Nuri hocanın puan cetvelini içeren cevap anahtarını kontrol ettiğimde tam 19 alacağımı hesaplamıştım. Sınavlar 25 üzerinden değerlendirilir ve genelde 9–10 çok iyi kabul edilirdi. Nuri Hoca’nın odasına gidip “Hocam sınavdan 19 alacağım” dediğimde yüzündeki ifadeyi hâlâ hatırlıyorum. Bana gülümseyerek “Hadi bakalım, göreceğiz” demişti. Sonuçlar açıklandığında gerçekten 19 aldım. Beni ilk gördüğünde büyük bir heyecanla “Evet, 19 aldın, tebrik ederim, çok şaşırdım” dedi. Sadece sınav sabahı yaklaşık üç saat çalıştığımı söylediğimde ise daha da şaşırmıştı. (Bu noktada altını çizmek isterim: Lütfen beni örnek almayın, zamanında çalışın :))

Henüz bir bilgisayarım yokken paramı mantıklı bir karar vererek yazılım eğitimine harcamıştım. Tekrar para biriktirerek ilk bilgisayarımı aldığım da sanıyorum ikinci sınıftaydım. O yıllarda eve teslimat yapıyorlardı. Teslimata gelen kişilere bilgisayarı nasıl açacağını sorduğum anı hiç unutmuyorum. Kod yazabiliyordum ama daha önce hiç bilgisayar açmam gerekmediği için nasıl açıldığını bilmiyordum. Nasıl yani dediğinizi duyar gibiyim, bölümdeki ve kurstaki bilgisayarlar her zaman açık ve kullanıma hazır ve benim de bilgisayarı açmam hiç gerekmemişti. :D

Sanıyorum 4. yılımızdaydık, en yakın arkadaşım Gürkan, Haşmet Hoca’nın kendisine teknokentte bir yazılım firmasında staj ayarladığını söyledi. “Böyle bir imkân varsa Haşmet Hoca beni nasıl unuttur?” dedim ve hemen hocanın odasına gidip aynı talepte bulundum. :) Sağ olsun, beni de aynı şirkete yönlendirdi ve böylece yazılım sektöründeki kariyerim başlamış oldu. Üç aylık stajın ardından bana tam zamanlı iş teklifi yaptılar. Henüz mezun olmamıştım ama ders sayım azalmıştı. Bu kaçıramayacağım bir fırsattı ve hemen kabul ettim. Aynı kampüste olmanın verdiği avantajla hem derslere devam edebildim hem de çalışmaya başladım. Böylece diplomamı almadan profesyonel iş hayatına adım atmış oldum.

Çok fazla soru çözümü gerektiren dersleri ilk alışımında veremediğim için bölümden mezuniyet sürem uzadı ama zaten bir iş sahibi olduğum için mental olarak bu durumdan çok etkilenmedim diyebilirim. Tabi sınavlara girip hala diploma alamadığımı gördüğüm kabusları saymazsak. Evet evet hala bu kabusları görmeye devam ediyorum. :D

İlk çalıştığım şirkette beş yıl görev yaptım. Ardından, yeni şeyler öğrenme isteğiyle Savunma Sanayisinde faaliyet gösteren bir firmaya geçtim. Bu firmaya giriş sürecinde yapılan sınavda, özgün çözümler üretmem ve sorulardan birini çözen tek aday olmam işe alınmamda belirleyici oldu. Bu firmada yazılım liderliğine yükseldikten sonra, yoğun çalışma temposu ve yeni bir alanda çalışma isteği beni yurt dışı fırsatlarını araştırmaya yöneltti. Bu süreçte Hollanda ve Finlandiya’dan mülakat teklifleri aldım. Her iki firma da bana teknik quizler gönderdi. Cevapları gönderdikten sonra bir sonraki aşamaya geçtim. Tesadüfen, bu ülkelere çok daha önceden aldığım seyahat biletlerim vardı. Firmalar ile yakın zamanda seyahat edeceğim bilgisini paylaştığımda yüz yüze mülakat yapmak istediklerini belirttiler. Evet evet seyahat planlarım tam olarak mülakat tarihlerine denk geldi ve benim için de harika bir deneyim oldu. :) Kısmet olacaksa bir şekilde insanın yolu açılıyor sanırım.

Önce Hollanda’dan teklif aldım; ancak gönlüm Finlandiya’daydı. Hollanda’dan düşünmek için ek süre istedim ve bu sırada Finlandiya’daki mülakatımı gerçekleştirdim. Görüşmenin ardından, Finlandiyadaki şirkete başka bir teklife yanıt vermem gerektiğini ancak olumlu bir sonuç çıkması hâlinde kendileriyle çalışmak istediğimi belirterek süreci hızlandırıp hızlandıramayacaklarını sordum. En kısa sürede cevap vereceklerini belirttiler ve ertesi gün onlardan bir teklif mektubu aldım. Böylece Unity’deki yolculuğum başlamış oldu. Yaklaşık yedi buçuk yıldır Unity’de Senior Software Engineer olarak çalışıyorum ve Helsinki, Finlandiya’da yaşıyorum.



Geriye dönüp baktığımda matematik eğitiminin bana kazandırdığı analitik düşünme ve problem çözme becerileri sayesinde genellikle karmaşık ve zorlayıcı konular üzerinde çalıştığımı görüyorum. Dikkat, sabır, analiz ve yaratıcı çözüm gerektiren bir iş varsa, “bu tam senlik” diyerek bana yönlendiriyorlar. Böyle anlarda “iyi ki matematik okumuşum” demekten kendimi alamıyorum. Matematik okumuş olmanın iş hayatında bana kattığı başarıdan ziyade, kazandırdığı yetkinlikleri kullanabilmek beni gerçekten mutlu ediyor.

Matematik eğitiminin bana en büyük katkısı sorgulama ve problem çözme becerilerimi ciddi anlamda geliştirmesi oldu diyebilirim. Özellikle ispat yapmak yalnızca matematikte değil, günlük hayatta ve iş yaşamında da bir şeyin doğru olduğunu kabul etmeden önce ardındaki nedenleri sorgulamamı sağladı. Bu düşünme biçimi, iş hayatında karşılaştığım sorunların kök nedenlerine inebilmemde ve hatanın nereden kaynaklandığını doğru analiz edebilmemde bana büyük avantaj sağladı.

Hâlen bölümde okuyan veya okumayı düşünen arkadaşlara en önemli tavsiyem, gerçekten yapmaktan keyif aldıkları alanlara yönelmeleri ve bunun için mezuniyeti beklememeleri olur. Akademik kariyer hedefleyenlerin not ortalamalarına odaklanmaları gerekirken, diğer sektörleri hedefleyenlerin kendilerini bilgi birikimi açısından geliştirecek fırsatları değerlendirmelerini öneririm. Öğrenciyken farklı bölümlerden ders almak da kariyer yönünüzü belirlemede çok etkili olabilir; ancak bunu yaparken ders yükünüzü iyi planlamanızı da tavsiye ederim.

Son olarak, üniversite öğrencisi olmanın tadını çıkarmanızı ve kendinizi mümkün olduğunca geliştirmenizi gönülden dilerim. Bana ulaşmak isterseniz LinkedIn üzerinden iletişime geçebilirsiniz. Sağlıcakla ve matematikle kalın...

■ BUSENUR ZİREK '24 – Aydem Holding, Gediz Perakende Kurumsal İş Uygulamaları Uzman Yardımcısı



busenurzirek@gmail.com

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü'nde geçirdiğim öğrenim süreci, akademik açıdan beni birçok yönden geliştiren verimli yıllardı. Bu dönem, problemlere yaklaşım biçimimi kökten değiştiren bir dönüm noktası oldu. Aldığım derslerin büyük kısmı benim için oldukça keyifliydi. Uygulamalı matematik dersleri genellikle daha anlaşılır ve ilgi çekici olsa da soyut derslerin de düşünme biçimimize kattığı çok değerli kazanımlar oldu. Gerçek hayatta değişen düşünce yapım ve olaylara bakış açım, bu farkındalığı bana çok daha net gösterdi. Matematik eğitiminin kazandırdığı analitik düşünme becerisi, soyut durumları somut biçimde modelleyebilme yeteneği ve araştırma yaparken kritik ayrıntılara dikkat edebilme alışkanlığı, iş hayatında beni ön plana çıkaran unsurlar oldu. Pandemi döneminde bankalarda staj yapmaya başladım, ancak bu stajlar fiziksel değildi. Matematik okumanın en zor yanı ise, mezuniyet sonrasında hangi sektörde ilerleyeceğinizi tam olarak kestirememeniz olabilir. Mezun olduktan sonra karmaşık iş hayatının ve belirsizliklerin içine düşseniz de üniversite yıllarında edindiğiniz kazanımlar bu zorlukların üstesinden gelmenize yardımcı oluyor. Ben ise en başta ne istediğimi değil, ne istemediğimi fark edenlerdenim; bu da bence hayatımdaki en büyük şans oldu. Denizbank bünyesinde düzenle-

nen Deniz'in İncileri Online Staj Programı'na, ardından Yapı Kredi Genç Yetenek Staj Programı'na katıldım. Bu deneyimler bana, bankacılık ve finans sektörlerinde ilerlemek istemediğimi gösterdi. Daha sonra ilgimi çeken alanlara yöneldim. Üniversitede aldığım Programlamaya Giriş dersinin ardından, bu alandaki ilgimi geliştirerek Python öğrenmeye devam ettim. Bunun yanı sıra veri tabanı alanında kendimi geliştirmeye başladım ve PostgreSQL ile MSSQL'i becerilerim arasına kattım. Öğrenme ve kendimi geliştirme sürecim devam ederken OdakGIS firmasında staj yapmaya başladım. Bu süreçte Visual Studio, Visual Studio Code, .NET ve Angular gibi teknolojileri kullanarak sıfırdan bir web projesi geliştirdim. Bu staj, hem profesyonel çevremi genişletmemi sağladı hem de kariyerimde hangi alanda ilerlemek istediğimi netleştirmeme yardımcı oldu.

Stajım devam ederken daha önce başvurduğum Aydem Enerji şirketinin yeni mezun işe alım programına kabul edildiğimi öğrendim. Şu anda Aydem Holding bünyesindeki grup şirketlerinden biri olan Gediz Perakende'de Kurumsal İş Uygulamaları Uzman Yardımcısı olarak çalışıyorum. Web servisleri ve mobil uygulamalar üzerine kendimi geliştirmeye devam ediyorum.

Uzun bir sürecin sonunda her şey benim için güzel bir şekilde tamamlandı. Elbette bu yolculuk kolay değildi; sayısız test, mülakat ve birçok ret e-postası zaman zaman sabır ve dayanıklılığımı gerçekten sınamdı. Ancak şimdi geriye dönüp baktığımda, her yorgunluğun ve belirsizliğin aslında beni bugüne hazırladığını görüyorum. Samimiyetle söyleyebilirim ki, tüm bu çabalar sonunda elde edilen başarıya fazlasıyla değer veriyorum.

Şu anda bulunduğunuz okul ve bölüm, düşündüğünüzden çok daha kıymetli bir yerde. Matematik, yalnızca dört işlemle ibaret bir ders değil; hayatınız boyunca öğrenmeye, sorgulamaya ve gelişmeye devam edebileceğiniz benzersiz bir alan. Bu süreçte sosyal olarak aktif olmaya, öğrenci kulüplerinde yer almaya, farklı projelere katılmaya ve en önemlisi hocalarınızla iletişimi sürdürmeye özen gösterin.

Öğrencilik yıllarınız sona erdiğinde ve kendinizi bir anda yetişkin hayatının içinde bulduğunuzda, matematiğin size yalnızca akademik bir birikim değil, aynı zamanda bambaşka bakış açıları kazandırdığını göreceksiniz. Bu bakış açısıyla, hayatın her alanında öğrenmeye ve gelişmeye devam ediyorum. Yeni mezun olacak arkadaşlarıma da şunu söylemek isterim: Her zorluk, sizi bir sonrakine hazırlıyor.

Ve elbette, bir Hacettepeli olarak biliyorum ki asıl hedef her zaman “daha ileriye, en iyiye.” Sorularınız ve merak ettikleriniz için her zaman ulaşabilirsiniz.

■ ZEYNEP KAPLAN '25 – *Lindos Naturals, Content & Community Specialist*

 zeynep-kaplan

Hacettepe Matematik Bölümü'nden 2025 Temmuz ayında mezun oldum. Bölüme pandeminin hayatımı altüst ettiği bir dönemde başladım. Online dersler, kampüs hayatından uzak kalmak ve lise boyunca alıştığımız çalışma biçimlerinin matematik bölümünde işe yaramadığını fark etmek birleşince, birinci sınıf derslerimi geçmeme rağmen matematiksel düşünme ve öğrenme becerilerim gerektiği kadar gelişmedi. İkinci sınıfta kampüse döndüğümüzde hem bu eksikliği kapatmaya çalışmak hem de mevcut dersleri yürütmek benim için büyük bir mücadeleleydi.

Bu bölümü neden seçtiğimi sorguladığım ve belirsizlik içinde yolumu aradığım bir dönemde Google Oyun ve Uygulama Akademisi ile karşılaştım. Başvurdum ve kabul aldım. Yaklaşık 10 ay süren bu programda Unity ile oyun geliştirmeyi öğrendim; proje yönetimi, girişimcilik ve yapay zekâ üzerine eğitimler aldım. Hobi olarak 2D oyunlar

için pixel art yapmaya başladım. Bitirme oyunumuzu geliştirirken hiç tanımadığım insanlarla kurulan bir ekipte proje yöneticiliği yapma fırsatı yakaladım ve bu rolü ne kadar sevdiğimi fark ettim.

Üniversite hayatım boyunca Matematiksel Düşünme ve Araştırma Topluluğu'nda aktif görev aldım. Üçüncü sınıfta denetim kurulu üyesi, dördüncü sınıfta ise sayman olarak çalıştım. Aynı zamanda topluluğun tüm tasarım sorumluluğunu üstlendim. O dönem arkadaşlarım bana sık sık kreatif bir alanda ilerlemem gerektiğini söylemeye başlamıştı.

Ayrık Yapılar dersinde 60 beklediğim vizeden 5 alıp bir daha kendisinden asla ders almayacağımı düşünsem de, Prof. Dr. Haşmet Gürçay'dan yazılımla ilgili alabildiğim tüm seçmeli dersleri aldım ve hepsini yüksek notlarla tamamladım. Yazılım yolculuğumda Haşmet Hocamızın emeği ve katkısı benim için çok kıymetliydi. Eğitim hayatımın son dersi de kendisiyleydi ve daha sonra CV'm için referans olma nezaketini gösterdi.

Dördüncü sınıf yazında iki farklı yazılım stajı yapma fırsatı yakaladım. Aslında staj yapmak için bir şeyler öğrenmeyi beklememin saçmalık olduğunu fark ettim. Zaten staj bulmak çok zorlu bir süreç ama önceki senelerde de aramış olsam mülakat tekniklerimi çok geliştirmiş olurum ve belki de birkaç deneyim daha kazanabilirdim. Mezuniyete yaklaşırken matematikçi arayan bir şirkette yapay zekâ Ar-Ge alanında çalışmaya başladım ve son dönemimi sadece sınavlara giderek tamamlayıp mezun oldum.

İlk işimde bir yıl çalıştıktan sonra, sadece yapabildiğim ve optimal bir seçenek olduğu için bir işi sürdürme fikrinin bana uygun olmadığını fark ettim. Tutkum olmayan bir alanda çalışmak bana keyif vermiyordu. Herkes kreatif bir iş yapmam gerektiğini söylese de, memur ve garantici bir ailede büyüdüğüm için buna ihtimal bile veremiyordum. Ancak bir noktada “hayat böyle mi olacak?” sorusu beni yeni arayışlara itti. Bu süreçte sayısız test çözdüm, görüşme yaptım ve reddedildim.

Şu an çalıştığım şirkete çok isteyerek başvurdum fakat reddedildim. Buna rağmen son bir mail atarak, birlikte çalışmasak bile onlar için faydalı olabilecek fikirlerimi paylaştım. Ardından tekrar görüştük ve benim için ayrı bir pozisyon açıldı. Özellikle start uplarda birebir uygun bir geçmişiniz olmasa bile isteğinizi ve katkı sunma arzunuzu göstermek çok değerli.

Bugün hiç yapacağımı düşünmediğim bir alanda, Content & Community Specialist olarak çalışıyorum. Gece dörtlerde afiş hazırlayan bir öğrencinin bir gün bunun kariyerine dönüşeceğine inanması zordu. Ama geriye dönüp baktığımda, yolumu bulma sürecimin beni tam da olmam gereken yere doğru taşıdığını görüyorum. Ve bu noktada bana her alana yönelme şansı veren matematik bölümüne sevgilerimi sunuyorum. Zor ve toksik bir ilişkimiz vardı... ama sonunda başardık. Benzer süreçlerden geçen arkadaşlarıma destek olmaktan mutluluk duyuyorum.

■ ALİ DEMİR 25' – No Surrender, Management Trainee



 ali-demir-a04108202

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü'nden Ocak 2025 itibarıyla mezun oldum. Okulun ilk yılını maalesef pandemide geçirdim. Online dönemde ilk yılı geçirmem, okula ve derslere adapte olmam açısından beni gerçekten çok zorladı. Bölüme ilk başladığımda her şey sanki YKS'nin devamı gibi geliyordu, o üniversite havasına girmekte güçlük çekiyordum. Özellikle okulun online olmasından dolayı Soyut Matematik gibi temel bir dersi uzaktan almam, bölümde temeli oturtabilmem açısından çok kötü oldu. Eğer bu yolu yürüyecekseniz, siz siz olun Soyut Matematik dersine çok önem verin; çünkü o temel eksik olunca sonrasında toparlamak çok daha fazla emek istiyor.

İlk yılın Güz dönemi bittikten sonra işlerin bu şekilde yürümeyeceğini fark ettim ve Bahar Dönemi'nde çok daha farklı bir tempoya girdim. Artık dersleri günü güne takip etmeye başlamış, derslerin dışındaki vaktimi de İngilizce çalışmaya ayırmıştım. İngilizce'ye verdiğim bu emeğin karşılığını daha ilk seneden almaya başladım. Online

dönemde ders kaynaklarına erişimin kısıtlı olduğunu sanırken, dili çözmeye başlamamla beraber internette aslında ne kadar sınırsız kaynak olduğunu keşfettim. Bu durum derslerime de ciddi bir katkı sağladı. Çünkü üniversitede, özellikle de Hacettepe Matematik gibi bir bölümde, sadece hocaların önerdiği kaynaklarla ya da uygulama derslerinde çözülen sorularla ders geçmek pek mümkün olmuyor. Geçseniz bile ancak "D" ile geçebiliyorsunuz; daha yüksek notlar ve gerçek bir başarı için çok daha fazlası, bireysel bir çaba gerekiyor.

İkinci seneye geçtiğimizde artık taşlar yavaş yavaş yerine oturmaya, hocaları da tanımaya başlamıştım. Online dönemde bölümün WhatsApp gruplarında sürekli Nazife Hoca'nın haberlere çıktığı, yıllardır çözülemeyen bir matematik probleminin bir kısmını çözdüğüne dair o meşhur haber kesiti dolanıp duruyordu. Onu gördükten sonra, açtığı her dersi almaya kesinlikle kararlıydım. Özellikle o ilk senelerdeki akademisyen olma hayalim hala taze olduğu için Nazife Hoca'nın bana matematik dünyasına dair çok şey katabileceğini biliyordum.

Gerçekten de yanılmadım; derslerine girdiğimde matematiğin sadece kanıtlardan ve formüllerden ibaret olmadığını, çok daha derin bir mantığa dayandığını anladım. Bu bakış açısını kazanmak, ufkumu sadece akademik alanla sınırlı kalmayacak şekilde genişletti. Nazife Hoca'dan ve onun matematik vizyonundan öğrendiklerim, beni yavaş yavaş akademisyenlik dışındaki farklı sektörleri de araştırmaya, matematiğin uygulama alanlarını merak etmeye itti.

Üçüncü senenin başlamasıyla beraber HÜMDAT (Hacettepe Üniversitesi Matematiksel Düşünme ve Araştırma Topluluğu) başkanlık görevini üstlendim. Bana göre bölümün en zor yılı olan üçüncü sınıfta, bir de topluluk yönetmek beni derslerden biraz uzaklaştırmıştı. Hem derslerin ağırlığını hem de topluluğun sorumluluğunu bir arada yürütmeye çalışmak gerçekten çok yıpratıcıydı; sanki günün 24 saatten çok daha uzun olması gerekiyordu.

Üçüncü senemde dersler ve topluluk başkanlığının yanı sıra bir de yazın Work and Travel programına katılabilmek için uğraşıyordum. Yıllardır kendi başıma üzerine koyduğum İngilizce çalışmamın meyvelerini asıl bu dönemde çok net hissetmeye başladım. Özellikle bölümde hocaların önerdiği temel kaynakların yavaş yavaş tamamen İngilizceleşmesi ve kaliteli Türkçe kaynak opsiyonunun neredeyse hiç olmaması, İngilizceye erkenden yatırım yapmış olduğum için beni her geçen gün daha da sevindiriyordu. Zira o noktada şunu iyice anlamıştım: Bölümde belli bir seviyenin üzerine çıkmak istiyorsanız, İngilizce artık bir seçenek değil, matematiği ana kaynağından okuyabilmeniz için zorunlu bir anahtar haline geliyor.

Work and Travel'dan dönmeme birlikte, kariyerimi farklı bir sektöre evirmek istediğime artık kesin olarak karar vermiştim. Orada edindiğim global iş deneyimi, farklı kültürlerden tanıdığım insanlar ve kurduğum iletişimler bakış açımı tamamen değiştirmişti. Sanki daha özgür, dinamik ve sosyal bir sektörde çalışmak beni çok daha mutlu edecekti. Bu motivasyonla hemen staj arayışına girdim ancak işler hiç de planladığım gibi gitmedi.

Global ekonomideki durgunluk, şirketlerin yatırımlarını kısıtlamasına ve dolayısıyla staj programları ile "Junior" pozisyonların neredeyse yok olmasına neden olmuştu. Üstelik hedeflediğim sektörlerin kalbinin İstanbul'da atması, Ankara'da Beytepe Erkek Öğrenci Yurdu'nda kalan benim için çok büyük bir dezavantajdı. Bu düğümü çözmek adına dördüncü senenin sonunda radikal bir karar aldım: Okulu yarım dönem uzatacak ve İstanbul'a taşınacaktım. Hem yeni bir network oluşturmak hem de o aradığım staj kapısını aralayabilmek için verilmesi gereken en doğru kararın bu olduğuna inanıyordum.

Düşüncelerim işe yaramıştı ve bir şirkette uzun dönem finans stajı yaptım. Finans stajı sırasında da oyun sektörünün yükselişi çok ilgimi çekiyordu. Zaten yıllardır bir yandan takip ettiğim sektör pandeminin patlamasıyla beraber ülkemizde çokça büyüyordu. Artık o sektörde çalışmak istediğime karar vermiştim ve kendimi o yönde geliştirmeye başlamıştım. Aylarca iş arayışımın sonunda No Surrender şirketinde Management Trainee olarak çalışmaya başladım.

İçimde daha anlatmak istediğim çok şey var ama dikkat süresinin bu denli kısaldığı günümüzde kısa soru cevaplara geçmek istiyorum.

1. *Hacettepe'de Matematik okuma deneyimim nasıldı ve tekrar bölümü seçer miyim?*

Hacettepe Matematik serüveni benim için hem çok zorlu hem de bir o kadar eğlenceliydi. Çok emek vermem, bazen uykusuz geceler geçirmem gerekti. Ama çıkışında "sıfır" alacağımı adım gibi bildiğim o ağır sınavlardan sonra bile Beytepe'nin manzarasına karşı yürümek, hani derler ya, "Ferrari'de ağlamak" gibi bir şeydi; öyle bir keyfi vardı o kampüsün.

Bugünkü aklımla "Bir daha bu bölümü okur muyum?" diye sorsalar, sanırım üzerine bir kez daha düşünürdüm. Bölümün bana problem çözme ve analitik düşünme yetisi açısından kattıkları gerçekten tartışılmaz. Bunu şu anki stajımda ve iş hayatımda her adımda fark ediyorum. Ama dürüst olmak gerekirse, profesyonel hayatta o öğrendiğim ağır teorik bilgilerin çoğunu kullanmadığımı da görüyorum. Geriye dönüp baktığımda, bazen "Belki akademik sorumluluğu daha az olan bir bölümde de aynı kariyeri inşa edebilirdim" diye düşünmeden edemiyorum.

2. *Bana en çok katkı sağladığını düşündüğüm dersler neler ve genel ders seçimi tavsiyelerim?*

Soyut Matematik, Analiz I-II-III, Lineer Cebir I-II, Analitik Geometri ve Diferansiyel Geometri... Bu dersler bölümün bel kemiği. Ders seçim aşamasında size naçizane tavsiyem; "bu hoca çok zorluyormuş" denilen isimlerden kaçmak yerine, aksine onlara yönelmenizdir. Bölümdeki her bir hocamızı ayrı ayrı seviyorum; hepsi hem alanlarında çok değerli hem de öğrencisine karşı son derece anlayışlı insanlar. Zamanla şunu fark ettim ki; o "zor" dediğimiz hocaların aslında tek derdi konuyu gerçekten özümsememizi sağlamakmış. Onların derslerdeki o tavizsiz duruşu ve çitayı yukarıda tutma çabası, farkında olmadan bize en çok şeyi öğreten unsur haline geliyor. Mezun olup gerçek hayata atıldığı- nızda, o zorlu süreçlerden kazandığınız direncin ve bakış açısının en büyük avantajınız olduğunu çok daha iyi anlıyorsunuz.

3. *Bölümü okurken yapılmasının önemli olduğunu düşündüğüm şeyler neler?*

Çokça belirttiğim gibi İngilizce çalışmanız, derslere çalışırken kendinizi farklı alanlarda da geliştir- meniz ve üniversite hayatının kesinlikle tadını çıkarmanız.

4. *İş ve staj arayışım nasıl ilerledi?*

Staj başvurularımda her yerden red alıyordum. Bazıları direkt CV'den eliyordu, bazıları ise attıkları o saatler süren sinir bozucu testlerden. Birkaç tanesiyle online mülakata kadar ilerlettiğim oldu ama nedenini bilmediğim sebeplerden onlarda da elendim. İstanbul'a taşınınca da 1 sene kadar bu böyle

ilerledi :) En sonunda bir yine bir LinkedIn başvurusuyla süreç benim adıma olumlu ilerledi ve staja başlamış oldum.

İş başvurularım da bir bu kadar sancılı geçti. Daha staj sırasında istediğim birkaç sektörü denemeye başlamıştım. Yine üst üste olumsuz dönüşler veya hiç dönmemeler :) Bu dönemde gerçekten de hiç pes etmeden denemek gerekiyor. İş başvurularında kendi adıma konuşacak olursam o can sıkıcı testleri daha az çözdüm ama süreçler daha zorluydu. Özellikle verdikleri case study'ler gerçekten çok uğraştırıcıydı günler boyunca onlara uğraşıyordum. En sonunda No Surrender ile sürecim başladı. Küçük bir ekip olduğumuzdan süreç daha hızlı ilerledi ve kısa sürede işe başlamış oldum. Şu anda 2. ayım ve çok şey öğreniyorum.

Hepinize bol başarılı ve bol eğlenceli bir üniversite hayatı dilerim.



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ



www.mat.hacettepe.edu.tr



[hacettepe_matematik_resmi](https://www.instagram.com/hacettepe_matematik_resmi)